

Meno a priezvisko:

Škola:

Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium

Školský rok/blok:

Predmet:

Fyzika

Skupina:

Trieda:

Dátum:

Teória

2 Mechanika hmotného bodu

2.1 Kinematika

2.1.9 Pohyb hmotného bodu po kružnici

Pohyb po kružnici je najjednoduchším príkladom krivočiareho pohybu. V praxi sa s ním stretávame veľmi často: rotujúca guľička na lanku, kolotoč, brúsny kotúč, pohyb v CD/DVD mechanike, pohyb Zeme okolo vlastnej osi a aj obeh okolo Slnka,

Poloha hmotného bodu na kružnici je určená sprievodičom, ktorého veľkosť je rovná polomeru r kružnice, po ktorej sa daný hmotný bod pohybuje. Ak prejde hmotný bod z bodu A do bodu B , opíše sprievodič uhol φ (niekedy sa mu hovorí uhlová dráha). **Jednotkou uhlovej dráhy je radián, $[\varphi] = \text{rad}$.**

Rad. je skratka za radián – jednotku rovinného uhlu. Napriek tomu, že sa v praxi používajú oveľa častejšie uhly, vo fyzike sa dáva prednosť radiánom (lepšie vyhovuje jednotka, ...). Prevody medzi radiánmi (tzv. oblúčová miera) a stupňami (tzv. stupňová miera) je možné vykonávať pomocou trojčlenky, ktorej základom je fakt, že $2\pi \text{ rad} \approx 360^\circ$ (pozor, vo vzťahu nie je rovnosť !!!).

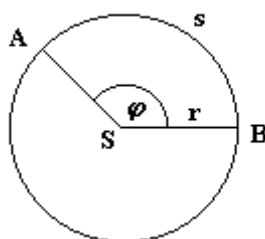
Hmotný bod pri prechode z bodu A do bodu B prejde dráhu s , ktorá sa rovná dĺžke oblúku AB . Pre veľkosť dĺžky oblúku s platí vzťah: $s = r \cdot \varphi$.

Tento vzťah je podobný vzťahu pre obvod kružnice $o = 2\pi r$. Práve 2π je ten uhol, ktorý musíme po kružnici opísať, aby sme ju celú „obešli“ a r je jej polomer. Ak nás zaujíma len časť obvodu kružnice, nebude vo vzťahu vystupovať plný uhol 2π , ale len jeho časť – napríklad φ .

Uhlová rýchlosť sa definuje ako podiel veľkosti uhlu $\Delta\varphi$, ktorý opíše polohový vektor za dobu Δt a tejto doby: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$. **Jednotkou uhlovej rýchlosti je radián za sekundu**

$[\omega] = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pri výpočtoch sa dosadzuje „len“ $[\omega] = \text{s}^{-1}$.

Uhlová rýchlosť je vektorová fyzikálna veličina. Jej vektor je kolmý k rovine kružnice, po ktorej obieha hmotný bod rýchlosťou $\vec{v}$, a umiestňujeme ho do stredu kružnice. Jeho **smer** určíme **podľa pravidla pravej ruky**: Ak položíme prsty ku kružnici tak, aby ukazovali smer vektora rýchlosti $\vec{v}$, tak vztýčený palec ukazuje smer vektora uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$. Pri rovnomernom pohybe po kružnici sa zachováva veľkosť aj smer uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$. Ďalej v našich textoch budeme hovoriť vždy len o veľkosti uhlovej rýchlosti ω .



Ak je $\omega = \text{konšt.}$, jedná sa o rovnomerný pohyb po kružnici.

Hmotný bod koná rovnomerný pohyb po kružnici vtedy, ak v rovnakých a ľubovoľne malých časových intervaloch opíše jeho sprievodič rovnaké uhlové dráhy φ .

Rovnomerný pohyb po kružnici je pohyb periodický. Plný uhol $\varphi = 2\pi$ opíše hmotný bod vždy za rovnaký čas – obežnú dobu (periódu) T .

Periódou je doba, za ktorú hmotný bod pohybujúci sa po kružnici, **vykoná práve jednu otáčku**. Ak dosadíme periódu do vzťahu pre definíciu uhlovej rýchlosti, dostaneme

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

Namiesto periódy môžeme pohyb po kružnici charakterizovať frekvenciou f .

Frekvencia v prípade pohybu hmotného bodu po kružnici udáva počet otáčok za jednotku času (väčšinou za sekundu).

Medzi frekvenciou f a periódou T platí vzťah $f = \frac{1}{T}$. Jednotkou frekvencie je s^{-1} . V praxi

používame jednotku hertz, platí: $1s^{-1} = 1Hz$. Uhlovú rýchlosť je možné tiež vyjadriť pomocou frekvencie f : $\omega = 2\pi f$.

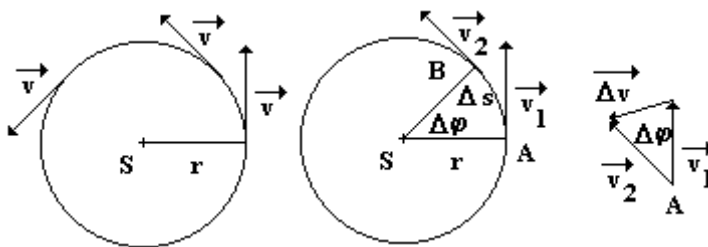
Veľkosť rýchlosti je možné určiť pomocou vzťahu $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega$. Veľkosť rýchlosti je teda priamo úmerná polomeru kružnice. Najväčšou rýchlosťou sa pohybujú body na obode kola, najmenšou (nulovou) body na ose otáčania. Ak sa jedná o rovnomerný pohyb po kružnici, je veľkosť rýchlosti v danej vzdialenosti od osi otáčania stále rovnaká (konštantná).

Vektor rýchlosti má v každom bode kruhovej trajektórie smer dotýčnice ku kružnici v danom bode.

Experimentálne overenie faktu, že body vzdialenejšie od osi rotácie sa pohybujú rýchlosťou s väčšou veľkosťou, možno uskutočniť pomocou dáždika s pestrým vzorom. Otvorte dáždík, roztočte ho okolo svojej osi, ktorá je totožná s držiakom dáždika, a pozorujte vzor. V blízkosti osi otáčania vzor relatívne dobre rozoznáte, zatiaľ čo na obode bude vzor nerozoznateľný vďaka veľkej rýchlosti. Pritom všetky body na dáždiku majú rovnakú uhlovú rýchlosť.

Vzhľadom k tomu, že nás bude zaujímať väčšinou rýchlosť na obode kruhu, disku, kola, ... hovoríme tejto rýchlosti **obvodová rýchlosť**.

Pri rovnomernom pohybe po kružnici sa teda nemení veľkosť rýchlosti hmotného bodu, ale mení sa jej smer. Z toho vyplýva, že **tangenciálne zrýchlenie hmotného bodu pri pohybe po kružnici je nulové**, zatiaľ čo normálové zrýchlenie nulové nie je (mení sa smer rýchlosti).



Zmena vektoru rýchlosti je $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Vektory $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$ zvierajú uhol $\Delta\varphi$, ktorý zviaza sprievodič v bode A a v bode B.

Vektor rýchlosti je kolmý na sprievodič. Ak zvierajú sprievodiče dvoch bodov na kružnici určitý uhol, musia tento uhol zviazať aj vektory rýchlosti zostrojené v uvažovaných bodoch.

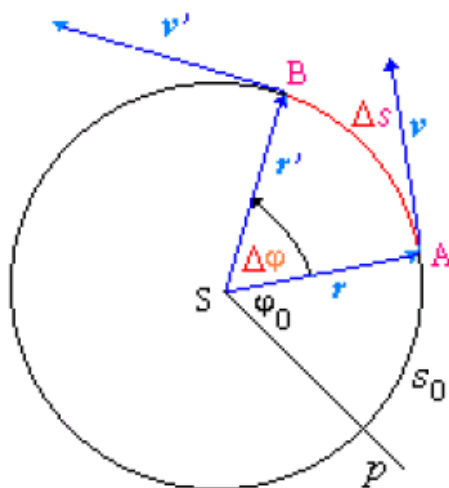
Ak je uhol $\Delta\varphi$ malý (tj. pokiaľ je možné nahradiť oblúk Δs úsečkou), je možné na základe podobnosti trojuholníkov písať: $\frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{v}{r}$, teda $\Delta v = \frac{\Delta s}{r} v$.

Veľkosť zrýchlenia určíme zo vzťahu $a_d = \frac{\Delta v}{\Delta s} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$. Pre malý uhol $\Delta\varphi$ je zmena rýchlosti $\Delta\vec{v}$ kolmá k rýchlosti $\vec{v}$. Zrýchlenie má smer zmeny rýchlosti, je teda tiež kolmé k okamžitej rýchlosti. V prípade rovnomerného pohybu po kružnici je celkové zrýchlenie zhodné s normálovým (dostredivým) zrýchlením.

Je dobré namaľovať si vlastný obrázok a skúsiť si narysovať vektor $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Ak splníte podmienky opísané pri odvodzovaní (hlavne malý uhol $\Delta\varphi$), mal by mieriť vektor $\Delta\vec{v}$ (približne) do stredu kružnice. Splnenie podmienok je možné dosiahnuť tak, že zvolíte kružnicu s relatívne veľkým polomerom a body, v ktorých budete konštruovať vektory okamžitej rýchlosti, zvolíte blízko seba. Čím bližšie, tým skôr bude vektor $\Delta\vec{v}$ mieriť do stredu kružnice.

2.1.10 Rovnomerný pohyb po kružnici, rovinný uhol, uhlová rýchlosť, príklady

Keď má trajektória krivočiareho pohybu tvar kružnice, hovoríme o **pohybe po kružnici**. Pohyb po kružnici je zvláštnym prípadom krivočiareho pohybu. Všetky body trajektórie sú v tomto prípade rovnako vzdialené od jedného bodu, umiestneného v jej strede. V dynamike sa budeme zaoberať príčinou zakrivenia trajektórie hmotného bodu do tvaru kružnice – silou, ktorá smeruje vždy do stredu trajektórie.



Na obrázku je znázornená trajektória v tvare kružnice s geometrickým stredom v bode S , a polomerom r . Polohu hmotného bodu a rýchlosť jeho pohybu po kružnici budeme určovať vzhľadom na bod S . Orientované úsečky $\vec{r}$ a $\vec{r}'$, sú polohové vektory bodov A , B , ktorými hmotný bod prechádza v čase t a $t + \Delta t$. Majú rovnakú veľkosť $|\vec{r}| = |\vec{r}'| = r$.

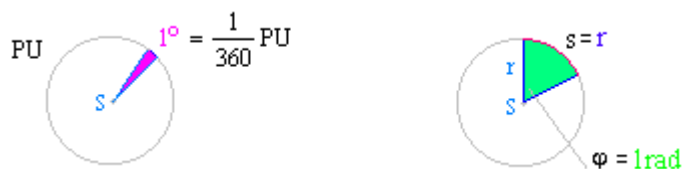
Rýchlosti $\vec{v}$ a $\vec{v}'$ sú kolmé na polomer a majú v bodoch A , B rovnakú veľkosť $|\vec{v}| = |\vec{v}'| = v$. Platia známe vzťahy:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} ; v = \frac{s - s_0}{t}$$

Ak chceme zdôrazniť, že rýchlosť pohybu súvisí s pohybom po kružnici, používame názov **obvodová rýchlosť**.

Okamžitá poloha bodu na kružnici vzhľadom na bod S , je úplne určená aj v súradnicovej sústave v ktorej priradíme každému bodu dve súradnice - veľkosť r polohového vektora $\vec{r}$ a uhol φ , ktorý tento vektor zvierá s nehybnou polpriamkou p . Napríklad bod A na predošlom obrázku má súradnice $A[r, \varphi_0]$. Sú to polárne súradnice.

Veľkosť rovinného uhla môžeme vyjadriť v dvoch rôznych jednotkách:



1. Jednotka uhla v stupňovej miere - **uhlový stupeň** $[^\circ]$ je definovaný ako $\frac{1}{360}$ plného uhla (PU).

2. Jednotka uhla v oblúčkovej miere - **radián** $[rad]$ je definovaný ako stredový uhol, ktorému na obvode kružnice prislúcha kruhový oblúk o dĺžke r jej polomeru. Radián je odvodená jednotka SI.

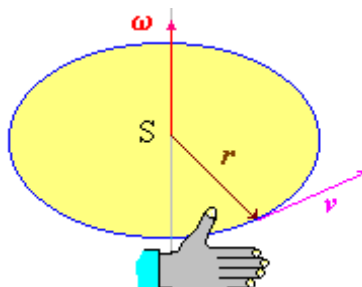
Plnému uhlu zodpovedá oblúk s dĺžkou $2\pi r$, preto je $360[^\circ] \Rightarrow 2\pi[rad]$. Ľubovoľnej dĺžke s oblúka na obvode kružnice s polomerom r zodpovedá stredový uhol $\varphi = \frac{s}{r} [rad]$.

Na opis pohybu hmotného bodu po kružnici zavádzame vektorovú fyzikálnu veličinu, ktorá súvisí so zmenou orientovaného uhla φ opísaného polohovým vektorom a nazýva sa **uhlová rýchlosť**.

Veľkosť uhlovej rýchlosti rovnomerného pohybu po kružnici je daná vzťahom:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi - \varphi_0}{t} [rad \cdot s^{-1}]$$

Uhlová rýchlosť číselne udáva veľkosť uhla opísaného polohovým vektorom hmotného bodu za časovú jednotku.



Obrazom uhlovej rýchlosti $\vec{\omega}$ ako vektorovej veličiny je orientovaná úsečka, ktorú umiestňujeme kolmo na rovinu kružnice, do jej stredu S . Dohodnutý smer uhlovej rýchlosti je určený pravidlom pravej ruky. Ak prsty pravej ruky ukazujú smer okamžitej rýchlosti, vztýčený palec ukazuje smer vektora $\vec{\omega}$.

Príklad 1

Nájdite pre rovnomerný pohyb po kružnici vzťah, ktorý vyjadruje závislosť veľkosti uhla φ , opísaného polohovým vektorom, od času.

Riešenie: Zo vzťahu pre veľkosť uhlovej rýchlosti vyjadríme uhol φ vzťahom

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t$$

Je to lineárna funkcia, podobne, ako vzťah $s = s_0 + v \cdot t$ pre dráhu rovnomerného pohybu.

V prírode sa s rovnomerným pohybom po kružnici, podobne, ako s rovnomerným priamočiarym pohybom, nestretávame. Pohyb planét slnečnej sústavy okolo Slnka, ale aj pohyb iných objektov, sa k nemu do istej miery približuje. Veľký význam má tento druh pohybu v technickej praxi.

Javy, ktoré sa po uplynutí rovnakého času (periodicky) opakujú, sú **periodické javy**. Rovnomerný pohyb hmotného bodu po kružnici je periodický pohyb. Čas T , za ktorý polohový

vektor hmotného bodu opíše plný uhol 2π a hmotný bod prejde po kružnici dráhu $2\pi r$, sa nazýva **perióda, alebo obežná doba**.

Počet periód, alebo počet obehov po kružnici za časovú jednotku určuje fyzikálna veličina **frekvencia**. Definujeme ju vzťahom

$$f = \frac{1}{T} \quad \left[\frac{1}{s} = 1\text{Hz} \right] \quad 1\text{Hz} = 1\text{Hertz}$$

Príklad 2

Pre rovnomerný pohyb po kružnici nájdite vzťahy:

1. medzi veľkosťami obvodovej a uhlovej rýchlosti,
2. medzi veľkosťou obvodovej rýchlosti, alebo uhlovej rýchlosti a periódou alebo frekvenciou.

Riešenie:

1. Vzťah medzi uhlom $\Delta\varphi$ v radiánoch, opísaný polohovým vektorom za čas Δt , a zodpovedajúcou dráhou Δs na kružnici s polomerom r , zapíšeme v tvare

$$\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$$

Po vydelení tohoto vzťahu časom Δt dostávame výraz $\frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, z ktorého vyplýva

vzťah medzi veľkosťou obvodovej rýchlosti a uhlovej rýchlosti

$$v = r \cdot \omega$$

2. Vo vzťahoch pre veľkosť rýchlosti a uhlovej rýchlosti zvolíme čas $\Delta t = T$, pre ktorý je $\Delta s = 2\pi r$ a uhol v radiánoch je $\Delta\varphi = 2\pi$. Po dosadení získame vzťah medzi veľkosťou obvodovej rýchlosti a periódou (alebo frekvenciou)

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

a vzťah medzi veľkosťou uhlovej rýchlosti a periódou, alebo frekvenciou

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Problémy na riešenie

1. Ktorá podmienka je splnená, keď je pohyb po kružnici rovnomerný ?
2. Vzhľadom na ktorý vzťažný bod určujeme rýchlosť pohybu po kružnici ?
3. Napíšte vzťahy pre určenie veľkosti rýchlosti rovnomerného pohybu po kružnici.
4. Aký je vzťah medzi jednotkami rovinného uhla - uhlovým stupňom a radiánom ?
5. Prepočítajte hodnoty uhlov 40° , 135° , 270° , 360° na hodnoty v radiánoch.
6. Prepočítajte hodnoty uhlov 1rad , $\frac{\pi}{4}\text{rad}$ na hodnoty v stupňoch.
7. Ktorým vzťahom je daná veľkosť uhlovej rýchlosti rovnomerného pohybu po kružnici a akú má jednotku ?
8. Vypočítajte veľkosť uhlovej rýchlosti bodu, ktorý polovicu svojej dráhy po obvode kola prešiel za čas 0,1 s. Načrtnite graf závislosti $\varphi = \varphi(t)$ pre pohyb so stálou veľkosťou uhlovej rýchlosti.
9. Vysvetlite pojmy perióda, frekvencia a určte ich jednotku.
10. Odvodte vzťah medzi rýchlosťou a uhlovou rýchlosťou pohybu po kružnici.
11. Vyjadrite závislosť rýchlosti a uhlovej rýchlosti od a)periódy, b) frekvencie pohybu po kružnici.