

Meno a priezvisko:

Škola:

Škola pre mimoriadne nadané deti a Gymnázium

Školský rok/blok:

Predmet:

Fyzika

Skupina:

Trieda:

Dátum:

Teória

### 3 Gravitačné pole

Pohyby telies v homogénnom gravitačnom poli Zeme  
Voľný pád, vrhy telies

#### 3.3 Pohyby telies v homogénnom gravitačnom (tiažovom) poli Zeme

Budeme sa zaoberať pohybmi telies, ktorých **trajektórie** sú vzhľadom k rozmerom Zeme natoľko **malé**, že gravitačné (tiažové) pole, v ktorom sa telesá pohybujú, môžeme považovať za **homogénne**.

Len malú časť gravitačného poľa nad povrchom Zeme môžeme považovať za homogénnu. Pretože zotrvačná odstredivá sila je oveľa menšia ako gravitačná sila, s dobrou presnosťou **platí**  $\vec{F}_G \doteq \vec{F}_g$  **a tiež**  $\vec{g} \doteq \vec{a}_g$ . Preto **nebudeme rozlišovať medzi gravitačnou a tiažovou silou a dohodneme sa na označovaní týchto síl (tiažová, gravitačná, tiaž) ako „gravitačná sila“**.

Sústredíme sa na zjednodušený (a v praxi ťažko realizovateľný) prípad, keď na teleso nepôsobí žiadna iná sila (napríklad odporová sila vzduchu) okrem gravitačnej (tiažovej) sily. Pohyby budeme pozorovať v sústave spojenej so Zemou.

##### 3.3.1 Voľný pád

Jedná sa o najjednoduchší pohyb v homogénnom gravitačnom poli Zeme. Voľný pád je pohyb rovnomerne zrýchlený s nulovou počiatočnou rýchlosťou  $v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$  a so zrýchlením rovným gravitačnému zrýchleniu  $\vec{g}$ . Môžeme ho charakterizovať veľkosťou okamžitej rýchlosti  $v$  a dráhou  $s$  v čase  $t$  od začiatku pohybu:

$$v = g.t ; s = \frac{1}{2} g.t^2$$

##### 3.3.2 Vrhly telies

Pohyby so začiatočnou rýchlosťou  $v_0 \neq 0 \text{ m.s}^{-1}$  v homogénnom gravitačnom poli vo vákuu sa nazývajú **vrhy**. **Sú to pohyby zložené z rovnomerného priamočiareho pohybu rýchlosťou  $\vec{v}_0$  a voľného pádu**. Rozlišujeme ich podľa smeru začiatočnej rýchlosti  $\vec{v}_0$ .

###### 3.3.2.1 Zvislý vrh nahor

**Zvislý vrh nahor** koná hmotný bod, ak bolo teleso vrhnuté nahor s počiatočnou rýchlosťou  $\vec{v}_0$  zvisle nahor, tj. má opačný smer ako gravitačné zrýchlenie  $\vec{g}$ . Smerom nahor sa pohybuje rovnomerne spomalene (so zrýchlením  $-\vec{g}$ ). Veľkosť okamžitej rýchlosti  $\vec{v}$  sa postupne znižuje (smer sa zachováva) a po dosiahnutí najvyššieho bodu trajektórie (bod  $H$ ), v ktorom sa teleso na okamih zastaví – sa okamžitá rýchlosť rovná nule. Potom sa teleso vracia späť voľným pádom k Zemi.

Skutočnosť, že teleso vrhnuté zvisle nahor postupne znižuje veľkosť svojej rýchlosti, v bode  $H$  sa zastaví a potom začína znova zrýchľovať, môžeme pozorovať na basketbalistovi, ktorý sa snaží dať pri výskoku kôš. Pri pozorovaní tohoto pohybu sa zdá, že basketbalista „visí“ pri koši.

Je to preto, že jeho pohyb v okolí koša trvá dlhší čas, ako na zostávajúcej trajektórii, na ktorej sa pohybuje väčšou rýchlosťou.

Veľkosť okamžitej rýchlosti  $v$  v čase  $t$  je daná vzťahom:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

Pre okamžitú výšku  $y$  nad miestom, z ktorého bolo teleso vrhnuté, v čase  $t$  platí:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Najväčšia výška, ktorú teleso dosiahne, sa nazýva **výška vrhu**  $h$ . V tejto výške je rýchlosť telesa nulová, teda  $v_0 - g \cdot t_v = 0$ , z čoho plynie vzťah pre **čas výstupu**  $t_v$ :

$$t_v = \frac{v_0}{g}$$

Výšku vrhu nad miestom, z ktorého bolo teleso vrhnuté, je možné určiť tak, že do rovnice pre okamžitú výšku dosadíme čas výstupu  $t_v$ :

$$h = v_0 t_v - \frac{1}{2} g t_v^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Z tejto výšky  $h$  teleso padá k zemi voľným pádom. Výšku  $h$  prekoná za čas dopadu  $t_d$ , teda

$h = \frac{1}{2} g t_d^2$ , odkiaľ dostávame vzťah pre čas dopadu:

$$t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2v_0^2}{2g^2}} = \frac{v_0}{g} = t_v$$

Pre veľkosť rýchlosti dopadu  $v_d$  môžeme písať:  $v_d = g \cdot t_d = g \cdot t_v = g \cdot \frac{v_0}{g} = v_0$ .

**Teleso dopadne späť do miesta, z ktorého bolo vrhnuté, rovnako veľkou rýchlosťou, akou bolo vrhnuté. Čas výstupu do maximálnej výšky je rovnaký ako čas pádu naspäť.**

#### Príklad:

Teleso bolo vrhnuté zvisle nahor rýchlosťou  $50 \text{ m.s}^{-1}$ . V akej výške bolo na konci štvrtej sekundy? Do akej najväčšej výšky vystúpilo? Za aký čas dopadlo?

#### 3.3.2.2 Zvislý vrh nadol

Zvislý vrh nadol koná teleso, ktoré je vrhnuté z výšky  $h$  nad povrchom Zeme počiatočnou rýchlosťou  $\vec{v}_0$  zvislo dole, tj. **v smere gravitačného zrýchlenia**  $\vec{g}$ . Jedná sa o pohyb rovnomerne zrýchlený s nenulovou počiatočnou rýchlosťou s veľkosťou  $v_0$  a zrýchlením  $\vec{g}$ .

Veľkosť okamžitej rýchlosti  $v$  v čase  $t$  od začiatku pohybu je daná vzťahom  $v = v_0 + g \cdot t$ . Pre okamžitú výšku  $y$  telesa nad povrchom Zeme platí vzťah:

$$y = h - \left( v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

Výška telesa nad povrchom Zeme sa pri tomto type pohybu znižuje; člen **v zátvorke zodpovedá vzdialenosti, ktorú teleso prekonalo od začiatku pohybu**. Vzhľadom k tomu,

že bolo vrhnuté z výšky  $h$  nad povrchom Zeme, získame výšku telesa nad povrchom Zeme v danom čase ako **rozdiel** uvedených **vzdialeností**.

Pri dopade na povrch Zeme je okamžitá výška rovná nule, takže platí:

$$0 = h - \left( v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

Čas dopadu  $t_d$  získame riešením kvadratickej rovnice  $-\frac{1}{2} g t_d^2 - v_0 t_d + h = 0$ , ktorú môžeme upraviť na tvar  $g t_d^2 + 2 v_0 t_d - h = 0$ . Pre čas dopadu  $t_d$  dostávame korene:

$$(t_d)_{1,2} = \frac{-2v_0 \pm \sqrt{4v_0^2 + 8hg}}{2g} = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g}. \text{ Vzhľadom k tomu, že } v_0 < \sqrt{v_0^2 + 2hg} \text{ a že}$$

fyzikálny zmysel má len kladný čas dopadu, dostávame pre čas dopadu vzťah:

$$t_d = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g}$$

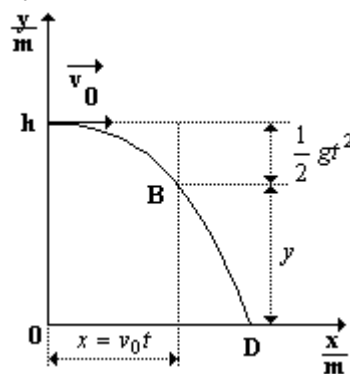
Pre veľkosť rýchlosti dopadu môžeme odvodiť vzťah:

$$v = v_0 + g \cdot t_d = v_0 + g \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2hg}}{g} = \sqrt{v_0^2 + 2hg}$$

Príklady: kameň vrhnutý smerom nadol z mosta, ... .

### 3.3.2.3 Vodorovný vrh

Vodorovný vrh koná teleso, ktorému udelíme **počiatočnú rýchlosť**  $\vec{v}_0$  **vo vodorovnom smere** – jeho začiatočná rýchlosť  $\vec{v}_0$  je kolmá na gravitačné zrýchlenie  $\vec{g}$ .



Jeho trajektória je časť paraboly, ktorej vrchol je v mieste vrhu. Pre jednoduchší opis vodorovného vrhu si jeho trajektóriu zakreslíme do súradnicovej sústavy  $Oxy$  tak, že miesto vrhu má súradnice  $[0; h]$ , kde  $h$  je výška, z ktorej je teleso vrhané.

Súradnice (ľubovoľného) bodu  $B$ , v ktorom sa teleso nachádza za čas  $t$  od okamihu vodorovného vrhu sú:

$$x = v_0 t$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Najväčšia vzdialenosť od miesta vrhu meraná vo vodorovnej rovine sa nazýva **dĺžka vrhu**  $d$ . V tejto vzdialenosti teleso končí svoj pohyb a ocitne sa v bode  $D = [d; 0]$ . V okamihu dopadu platí:

$$0 = h - \frac{1}{2} g t_d^2$$

Z tohoto vzťahu môžeme odvodiť pre čas dopadu  $t_d$  telesa:  $t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  a po dosadení do

vzťahov pre súradnice:  $x = v_0 t_d$ , dostávame dĺžku vrhu  $d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . **Dĺžka vrhu závisí od veľkosti počiatočnej rýchlosti a od výšky, z ktorej bolo teleso vrhnuté.**

V praxi: výstrel z pušky vo vodorovnom smere, ...

Strelec, ktorý vystrelil z pušky vo vodorovnom smere, vidí voľný pád guľky. Pohyb vo vodorovnom smere zo svojho pohľadu nevidí. Keby to bolo možné a ďalší kamarát – trpaslík – by bežal presne pod letiacou strelou, zaznamenal by len rovnomerý priamočiary pohyb strely – voľný pád by nebol schopný zo svojho pohľadu zaznamenať. Úlohu týchto dvoch pozorovateľov zohrávajú osy karteziánskeho systému súradníc: trpaslík – os  $x$ , strelec – os  $y$  (zvislý smer). Kamarád strelca, ktorý stojí kúsok vedľa strelca, zaznamená pohyb strely ako vodorovný vrh.

Vráťme sa späť k súradniciam  $x = v_0 t$  a  $y = h - \frac{1}{2} g t^2$ . Vylúčením času  $t$  získame rovnicu

$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + h$ , čo je **rovnica paraboly**. Pri vodorovnom vrhu sa hmotný bod pohybuje po

parabole. Rýchlosť v ľubovoľnom čase  $t$  je  $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$ . Čas dopadu  $t_d$  sa určí z podmienky

$y = 0$ , odkiaľ  $t_d = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ . Dĺžka vrhu bude  $d = v_0 t_d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

#### Príklad:

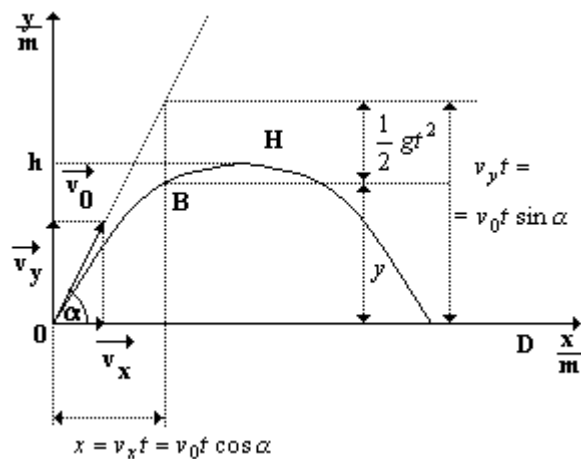
Z veže vysokej 125m bol vrhnutý kameň vo vodorovnom smere rýchlosťou  $20 \text{ m.s}^{-1}$ . Akú rýchlosť mal kameň na konci druhej sekundy? V akej vzdialenosti od päty veže dopadne?

#### 3.3.2.4 Šikmý vrh nahor

Týmto typom pohybu sa pohybuje teleso, ktorému udelíme počiatočnú rýchlosť  $\vec{v}_0$ , ktorej smer zvierá s vodorovnou rovinou **elevačný uhol**  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Aj u tohoto vrhu dochádza

k skladaniu rovnomerného priamočiareho pohybu v smere počiatočnej rýchlosti  $\vec{v}_0$  a voľného pádu. Trajektóriou tohoto pohybu je **parabola**, ktorej vrchol leží v najvyššom bode trajektórie (v bode  $H$ ).

Opäť, pre lepší opis tohoto pohybu, zakreslíme jeho trajektóriu do súradnicového systému  $Oxy$  tak, že miesto vrhu bude v jeho počiatku. Počiatočná rýchlosť  $\vec{v}_0$ , ktorú telesu udelíme, môžeme rozložiť do smerov osí súradnicového systému. Jednotlivé zložky majú (v čase  $t$  od začiatku pohybu) veľkosť:  $x$ -ová zložka  $v_x = v_0 \cos \alpha$  a  $y$ -ová zložka  $v_y = v_0 \sin \alpha - g t$ .



V smere osi  $y$  sa jedná o zvislý vrh nahor – tak by videl výkop lopty fotbalista. Lopta najprv poletí rovnomerne spomaleným pohybom smerom nahor, zastaví sa a následne sa bude voľným pádom pohybovať smerom nadol. Súper – trpaslík – bežiaci presne pod loptou by videl rovnomerný priamočiary pohyb lopty.

Súradnice (ľubovoľného) bodu  $B$ , v ktorom sa nachádza teleso v čase  $t$  od začiatku pohybu, sú:  $x = v_x t = v_0 t \cos \alpha$  a  $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$ .

Najväčšia vzdialenosť meraná vo vodorovnej rovine od miesta vrhu do miesta dopadu  $D$  sa nazýva **dĺžka šikmého vrhu**  $d$ . Bod dopadu má súradnice  $D[d;0]$  a môžeme teda napísať

$$0 = v_0 t_d \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_d^2$$

Odtiaľto pre čas dopadu  $t_d$  dostávame:  $t_d = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$  alebo  $t_d = 0s$ . Nulový čas nemá fyzikálny zmysel, pretože opisuje fyzikálny stav telesa na začiatku pohybu.

Dosadením do vzťahu  $x = v_0 t_d \cos \alpha$  získame dĺžku vrhu:

$$d = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

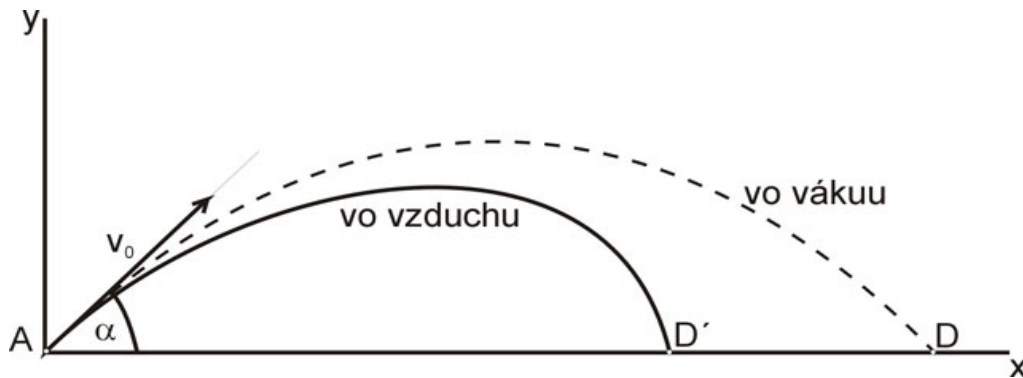
Pri úprave sme použili vzťah, ktorý sa odvodzuje v matematike pri výklade goniometrických funkcií:  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

Aj pri šikmom vrhu je možné určiť **výšku vrhu**  $h$ , do ktorej sa teleso v priebehu svojho pohybu dostane. Ak sa nachádza teleso v bode  $H$ , má  $y$ -ová zložka rýchlosti nulovú veľkosť, teda  $0 = v_0 \sin \alpha - g t_h$ . Dostávame vzťah pre čas  $t_h$ , za ktorý teleso dosiahne maximálnu

výšku,  $t_h = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{t_d}{2}$ . Dosadením do vzťahu  $y = v_0 t_h \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_h^2$  dostaneme maximálnu výšku vrhu:

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

Pri práve odvodených vzorcoch je použitá matematická konvencia zápisu operácií s goniometrickými funkciami. Zápis  $\sin 2\alpha$  je rovnaký ako  $\sin(2\alpha)$ , zápis  $\sin^2 \alpha$  znamená to isté ako  $(\sin \alpha)^2$ .



Šikmý vrh má praktické uplatnenie v športe a vojenskej technike. Dĺžka vrhu sa vo vojenskej terminológii nazýva **dostrel**. Parabolickú trajektóriu opisuje šikmo vrhnuté teleso v homogénnom poli len vo vákuu. V blízkosti povrchu Zeme však odpor vzduchu spôsobuje, že dráha striel nie je parabola, ale **nesúmerná balistická krivka**. Šikmo vrhnuté teleso sa pohybuje po časti paraboly len za predpokladu, že naň nepôsobia žiadne ďalšie vonkajšie sily okrem gravitačnej (nepôsobí odpor vzduchu, ...). V praxi ale nie vždy je možné odpor vzduchu zanedbať (najmä pri vysokých rýchlostiach telesa). V dôsledku existencie odporovej sily sa teleso pohybuje nie po časti paraboly, ale po balistickej krivke, ktorá (na rozdiel od paraboly) nie je symetrická. To má za následok skrátenie dĺžky vrhu vo vzduchu oproti dĺžke vrhu vo vákuu.

Vráťme sa späť k súradniciam  $x = v_0 t \cos \alpha$ ;  $y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$ , vylúčením času  $t$  získame

rovniciu  $y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$ , čo je rovnica paraboly. Teda hmotný bod sa pohybuje po

parabole. Čas dopadu  $t_d$  určíme z podmienky  $y = 0$ , odkiaľ dostaneme

$$v_0 t_d \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_d^2 = 0$$

$$t_d = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ alebo } t_d = 0 \text{ s (nemá fyzikálny zmysel)}$$

Potom dĺžka vrhu bude  $d = v_0 t_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ . **Dĺžka vrhu bude maximálna, ak  $\sin 2\alpha = 1$ ,**

**teda  $\alpha = 45^\circ$ . Potom  $d = \frac{v_0^2}{g}$ .**

#### Príklad:

Teleso bolo vrhnuté šikmo nahor začiatočnou rýchlosťou  $40 \text{ m.s}^{-1}$  pod uhlom  $60^\circ$ . Aká bola výška vrhu, dĺžka vrhu a za aký čas teleso dopadlo ?