

Meno a priezvisko:

Škola:

Predmet:

Školský rok/blok:

Skupina:

Trieda:

Dátum:

Bilingválne gymnázium C. S. Lewisa, Beňadická 38, Bratislava

Fyzika

/

Teória

Špeciálna teória relativity (ŠTR)

6 Klasické a relativistické predstavy o priestore a čase

1.6.4 Relativistická dynamika

Relativistická dynamika je dynamika telies pohybujúcich sa rýchlosťami, pri ktorých sa prejavujú relativistické javy:

- relativistická hmotnosť telesa rastie s jeho rýchlosťou,
- relativistická energia telesa pri rýchlostiach blížiacich sa rýchlosti svetla rastie nad všetky medze.

Hmotnosť telesa m v klasickej fyzike je veličina konštantná a nezávislá od jeho rýchlosti.

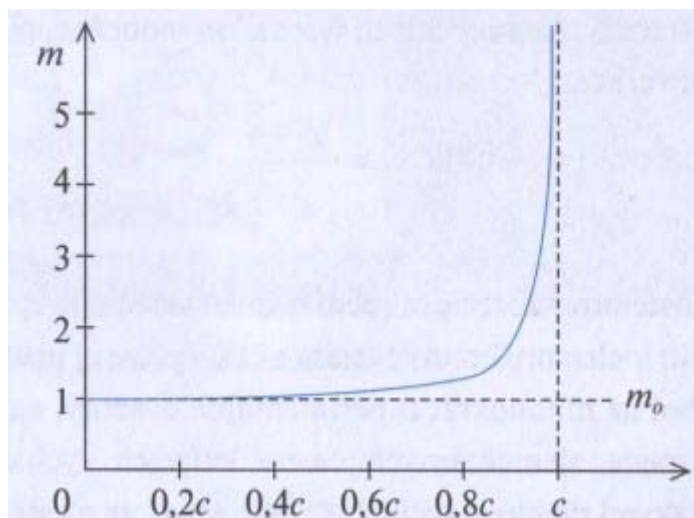
1.6.5 Relativistická hmotnosť

Relativistická hmotnosť m je hmotnosť telesa pohybujúceho sa v danej inerciálnej vzťažnej sústave rýchlosťou $\vec{v}$ a je daná vzťahom:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

kde m_0 je **pokojuv**á hmotnosť telesa, t.j. jeho hmotnosť vo vzťažnej sústave, vzhľadom ku ktorej je v pokoji, c je rýchlosť svetla vo vákuu, v je veľkosť rýchlosti. Obecne platí $m \geq m_0$. Pri malých rýchlostiach ($v \ll c$) sa $m \doteq m_0$; pri veľmi veľkých rýchlostiach, ak sa $v \rightarrow c$, rastie relativistická hmotnosť telesa m nad všetky medze, t.j. $m \rightarrow \infty$.

Zákon zachovania hmotnosti (pre relativistickú hmotnosť): Celková relativistická hmotnosť izolovanej sústavy telies je konštantná.



Relativistická hmotnosť telesa m rastie s jeho rýchlosťou; m_0 - pokojová hmotnosť telesa. Zo vzťahu pre relativistickú hmotnosť vyplýva, že rýchlosť svetla vo vákuu je hraničná rýchlosť,

ktorá nemôže byť žiadnym telesom s nenulovou pokojovou hmotnosťou dosiahnutá a ani prekročená. Ak by totiž platilo $v = c$, musela by sa hmotnosť $m = \infty$, čo je nemožné.

Na základe vzťahu pre relativistickú hmotnosť sa konštruujú urýchľovače urýchľujúce elementárne častice až na rýchlosti blízke rýchlostiam svetla. Pri týchto rýchlostiach sa prejavuje relativistický nárast ich hmotnosti a správna funkcia urýchľovačov potvrdzuje správnosť relativistického vzťahu.

Vzťah pre relativistickú hmotnosť bol mnoho krát overený v urýchľovači častíc. Napríklad urýchľovač v Stanforde (USA) urýchli elektróny na rýchlosť, pri ktorej je ich hmotnosť približne 40000-krát väčšia, ako keď sú v pokoji.

1.6.6 Relativistická hybnosť

V klasickej mechanike je hybnosť telesa definovaná vzťahom $\vec{p} = m_0 \cdot \vec{v}$, kde m_0 je pokojová hmotnosť telesa a $\vec{v}$ je jeho rýchlosť v danej vzťažnej sústave.

Pretože v relativistickej fyzike nie je hmotnosť konštantnou veličinou, pre veľkosť relativistickej

hybnosti pohybujúceho sa telesa platí vzťah: $p = m \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Zákon zachovania hybnosti (pre relativistickú hybnosť): Celková relativistická hybnosť izolovanej sústavy telies je konštantná.

1.6.7 Vzťah medzi energiou a hmotnosťou

Relativistická energia telesa E je energia telesa pohybujúceho sa v danej inerciálnej vzťažnej sústave rýchlosťou $\vec{v}$ a je daná vzťahom

$$E = m \cdot c^2$$

kde m je relativistická hmotnosť, c je rýchlosť svetla vo vákuu. Tento vzťah medzi relativistickou energiou E a hmotnosťou m sa nazýva **Einsteinov vzťah medzi hmotnosťou a energiou**.

Pokojuv energia telesa E_0 je jeho energia v inerciálnej vzťažnej sústave, v ktorej je teleso v pokoji, a je daná vzťahom $E_0 = m_0 \cdot c^2$, kde m_0 je pokojová hmotnosť telesa.

Pri akejkoľvek zmene celkovej energie telesa o ΔE sa zmení aj jeho hmotnosť o Δm , pričom platí vzťah $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$. Ak dodáme telesu energiu, zvýšime tým aj jeho hmotnosť.

Z Einsteinovho vzťahu $E_0 = m_0 \cdot c^2$ sú odvodené jednotky hmotnosti častíc používané v jadrovej a časticovej fyzike $1\text{MeV}/c^2 = 1,782662 \cdot 10^{-30} \text{kg}$. Ak má častica pokojovú energiu $x \cdot \text{MeV}$, jej pokojová hmotnosť sa rovná $x \cdot 1,782662 \cdot 10^{-30} \text{kg}$.

Zo vzťahov pre relativistickú energiu E a hybnosť p je možné odvodiť obecné platný vzťah medzi **energiou a hybnosťou**:

$$E^2 = (m_0 \cdot c^2)^2 + (p \cdot c)^2$$

alebo

$$E = m_0 \cdot c^2 \sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 \cdot c^2}}$$

Relativistická energia telesa E je súčtom jeho pokojovej energie E_0 a kinetickej energie E_k , t.j. $E = E_0 + E_k = m_0 \cdot c^2 + E_k$.

Relativistická kinetická energia E_k je teda daná vzťahom:

$$E_k = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_0^2 \cdot c^2}} - 1 \right)$$

Aj v relativistickej fyzike platí **zákon zachovania energie: Celková energia izolovanej sústavy je konštantná.**

Einsteinov vzťah $E = m \cdot c^2$ a anihilácia, resp. jej opak, t.j. vznik páru „elektrón-pozitrón“ z častice γ , potvrdzujú existenciu dvoch foriem hmoty:

- látka (hmotné častice a telesá)
- pole (napríklad elektromagnetické pole)

Pri zrážke elektrónu s pozitronom (pozitrón=antičastica k elektrónu) dochádza k úplnej premene ich hmotnosti na energiu, ktorá sa vyžiari ako žiarenie γ (t.j. častice γ). Táto premena sa nazýva **anihilácia** (anihilácia znamená „zmiznutie hmoty“) a je to premena látky (hmotných častíc) na inú formu hmoty – na elektromagnetické pole. Rovnako tak vznikajú z vysokoenergetických častíc γ , t.j. formy elektromagnetického vlnenia s vysokou frekvenciou, páry elektrón-pozitrón.

Pri rýchlostiach $v \ll c$ platí $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} \rightarrow 0$. V klasickej fyzike je zmena hmotnosti telesa pri zmene jeho energie zanedbateľná a hmotnosť telesa považujeme za konštantnú veličinu nezávislú od energie.

Príklad:

Kozmická loď letí zo slnečnej sústavy rýchlosťou $0,9 \cdot c$, kde c je rýchlosť svetla vo vákuu. Vyšle rádiový signál smerom k Zemi a iným smerom kozmickej lodi, ktorá letí pred ňou.

Aká bude rýchlosť týchto rádiových signálov, ktoré sa šíria priestorom od seba, každý rýchlosťou svetla, vzhľadom na slnečnú sústavu ?

Riešenie:

Vzťažná sústava S je pevne spojená so slnečnou sústavou, vzťažná sústava S' je kozmická loď letiaca rýchlosťou $v = 0,9 \cdot c$ od Zeme.

A. Rýchlosť rádiového signálu šíriaceho sa z kozmickej lode smerom k lodi pred ňou je $u' = c$, rýchlosť tohto signálu vzhľadom na sústavu S je rovná u .

Podľa Einsteinovho vzťahu pre relativistické skladanie rýchlostí platí: $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$. Za u' teda

dosadíme c , za v dosadíme $0,9 \cdot c$.

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{c + 0,9c}{1 + \frac{c \cdot 0,9c}{c^2}} = \frac{1,9c}{1 + \frac{0,9 \cdot c^2}{c^2}} = \frac{1,9c}{1 + 0,9} = c$$

B. Rýchlosť rádiového signálu šíriaceho sa z kozmickej lode smerom k Zemi je $u' = -c$, rýchlosť tohto signálu vzhľadom na sústavu S je rovná u . Záporné znamienko znamená, že

rýchlosť u' má opačný smer než rýchlosť v . Za u' teda dosadíme $-c$, za v dosadíme $0,9c$. Potom platí:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{-c + 0,9c}{1 - \frac{c \cdot 0,9c}{c^2}} = \frac{1,9c}{1 - 0,9} = \frac{-0,1c}{1 - 0,9} = -c$$

Oba rádiové signály sa šíria rýchlosťou svetla (vzhľadom na slnečnú sústavu), jeden smerom k Zemi, druhý smerom od Zeme.

Príklad:

Jadro ťažkého vodíka (deuterónu) sa skladá z neutrónu a protónu. Pokojová hmotnosť neutrónu je $m_{0n} = 1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, pokojová hmotnosť protónu je $m_{0p} = 1,6725 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ a pokojová hmotnosť deuterónu je $m_{0d} = 3,3433 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Deuterón možno rozštiepiť na neutrón a protón dodaním energie.

Určte energiu, ktorú musíme dodať na rozbitie deuterónu (tzv. väzbovú energiu).

Riešenie:

$$m_{0n} = 1,6748 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad m_{0p} = 1,6725 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad m_{0d} = 3,3433 \cdot 10^{-27} \text{ kg}; \quad c \doteq 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}; \quad \Delta m = ?; \quad \Delta E = ?$$

$$\Delta m = m_{0p} + m_{0n} - m_{0d} \Rightarrow \Delta m = 1,6725 \cdot 10^{-27} + 1,6748 \cdot 10^{-27} - 3,343 \cdot 10^{-27} = 4 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \Rightarrow \Delta E = 4 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = 3,6 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 2,25 \text{ MeV}$$

($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$; $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$; $1 \text{ MeV} = 1,602 \cdot 10^{-13} \text{ J}$)

Na rozbitie deuterónu je nutné dodať energiu $2,25 \text{ MeV}$.

Neriešené príklady:

1. Zo zdroja elektrónov vyleteli dva elektróny navzájom opačnými smermi rýchlosťami veľkosti $\frac{c}{2}$. Aká je rýchlosť jedného elektrónu vzhľadom na druhý? $\left[\frac{4}{5}c \right]$
2. Akú rýchlosť musí mať raketa vzhľadom na Zem, aby istý dej na Zemi pozoroval pozorovateľ v rakete ako dvojnásobne dlhý?
3. Vypočítajte pokojovú energiu elektrónu a neutrónu. [$0,51 \text{ MeV}$; $0,94 \text{ GeV}$]
4. Pri akej rýchlosti sa kinetická energia častice rovná jej pokojovej energii? [$2,6 \cdot 10^8 \text{ m/s}$]
5. Vypočítajte kinetickú energiu elektrónu, ktorého relativistická hmotnosť je $12 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. [$26 \cdot 10^{-15} \text{ J}$]

Ďalšie riešené príklady a otázky:

1. Vysvetlite rozdiel medzi klasickou fyzikou a špeciálnou teóriou relativity.

Riešenie:

Klasická fyzika (Archimédes, Newton) skúma fyzikálne vlastnosti telies, ktoré sú pomerne veľké a pohybujú sa malými rýchlosťami v ($v \ll c$). Pokladá hmotnosť, dĺžku, čas, súčasnosť dvoch udalostí, hybnosť, energiu za nepremenné, za nezávislé od rýchlosti pohybu.

Špeciálna teória relativity (Einstein) študuje pohyby telies, ktoré sa pohybujú rýchlosťami, porovnateľnými s rýchlosťou svetla vo vákuu c .

Relativistické skladanie rýchlostí:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{u \cdot v}{c^2}}$$

Relativistická zmena hmotnosti, času, dĺžky :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ (dilatácia)} \quad l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \text{ (kontrakcia)}$$

Relativistická zmena energie: Relativistická zmena hybnosti:

$$E = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Približný výpočet:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \doteq 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

2. Zo zdroja elektrónov vyletia v opačných smeroch dva elektróny. Každý elektrón má rýchlosť $v_1 = v_2 = 0,8c$. voči tomuto delu. Aká je ich relatívna rýchlosť?

Riešenie:

Rozbor:

$$v_1 = 0,8c, \quad v_2 = 0,8c, \quad w = ?$$

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \cdot v_2}{c^2}}$$

$$w = \frac{2 \cdot 0,8c}{1 + \frac{0,8c \cdot 0,8c}{c^2}} = \frac{1,6c^3}{c^2 + 0,64c^2} = \frac{1,6c^3}{1,64c^2} = 0,976c$$

$$w = 0,976c$$

Relatívna rýchlosť elektrónov je $w = 0,976c$.

3. Častica α vyletela z laboratórneho urýchľovača rýchlosťou v a pohybovala sa rovnomerne priamočiari. Trubicou o dĺžke 12cm preletela za čas 10ns. Akú dĺžku má trubica vo vzťažnej sústave spojenej s časticou α ?

Riešenie:

Rozbor:

$$s = 12\text{cm} = 0,12\text{m}, \quad t = 10\text{ns} = 10^{-9}\text{s}, \quad l = ?$$

$$v = \frac{s}{t}$$

$$v = \frac{0,12\text{m}}{10^{-9}\text{s}} = 0,12 \cdot 10^9 \text{m.s}^{-1}$$

$$v = 1,2 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}$$

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$l = 0,12\text{m} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1,2 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}}{3 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1}}\right)^2} = 0,12\text{m} \cdot \sqrt{1 - 0,4^2} = 0,12\text{m} \cdot \sqrt{1 - 0,16}$$

$$l = 0,12\text{m} \cdot \sqrt{0,84} = 0,12\text{m} \cdot 0,9165 = 0,11\text{m} = 11\text{cm}$$

$$l = 11\text{cm}$$

Dĺžka trubice urýchľovača sa zmenšila na 11cm.

4. Z urýchľovača vyletuje zväzok π mezónov rýchlosťou $v = 0,8c$. Polčas rozpadu π mezónov je $t_0 = 1,8 \cdot 10^{-8}\text{s}$. Vypočítajte za akú dobu sa rozpadne polovica mezónov a ako veľkú dráhu preletia, než sa rozpadnú.

Riešenie:

Rozbor:

$$v = 0,8c, \quad t_0 = 1,8 \cdot 10^{-8}\text{s}, \quad t = ?, \quad s = ?$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t = \frac{1,8 \cdot 10^{-8}\text{s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0,8c}{c}\right)^2}} = \frac{1,8 \cdot 10^{-8}\text{s}}{\sqrt{1 - 0,8^2}} = \frac{1,8 \cdot 10^{-8}\text{s}}{\sqrt{0,36}} = \frac{1,8 \cdot 10^{-8}\text{s}}{0,6} = 3 \cdot 10^{-8}\text{s}$$

$$t = 3 \cdot 10^{-8}\text{s}$$

$$s = v \cdot t$$

$$s = 0,8 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{m.s}^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-8}\text{s} = 7,2\text{m}$$

$$s = 7,2\text{m}$$

Polovica mezónov sa rozpadne za $t = 3 \cdot 10^{-8}\text{s}$. Pri tom preletia dráhu $s = 7,2\text{m}$.

5. Hustota železa je $\rho_0 = 7400 \text{ kg.m}^{-3}$ v nepohybujúcej sa sústave. Ako sa zmení hustota telesa zo železa, ak vzrástla jeho rýchlosť z nulovej hodnoty na hodnotu $v = 0,5c$?

Riešenie:

Rozbor:

$$\rho_0 = 7400 \text{ kg.m}^{-3}, \quad v = 0,5c, \quad \rho = ?$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \wedge \quad V = V_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}}{V_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{V_0} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^2} = \rho_0 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{\rho_0}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\rho = \frac{7400 \text{ kg.m}^{-3}}{1 - \left(\frac{0,5c}{c}\right)^2} = \frac{7400 \text{ kg.m}^{-3}}{1 - 0,5^2} = \frac{7400 \text{ kg.m}^{-3}}{0,75} = 9866,7 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$\rho = 9866,7 \text{ kg.m}^{-3}$$

Hustota telesa sa zmení na $\rho = 9866,7 \text{ kg.m}^{-3}$.

6. Vypočítate rýchlosť, pri ktorej je relativistická hybnosť častice α dvakrát väčšia, ako hybnosť vypočítaná podľa pravidiel klasickej mechaniky.

Riešenie:

Rozbor:

$$2p_0 = p$$

$$p_0 = m_0 \cdot v \quad \wedge \quad p = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$2. p_0 = p$$

$$2. m_0 \cdot v = \frac{m_0 \cdot v}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} / : m_0 v$$

$$2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1$$

$$4 \cdot \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = 1$$

$$4 - 4\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1$$

$$4 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 3$$

$$4v^2 = 3c^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c = 0,866c$$

$$v = 0,866c$$

Rýchlosť častice α je $v = 0,866c$

7. Kozmická loď sa pohybuje vzhľadom k Zemi rýchlosťou $12\,000 \text{ km.s}^{-1}$. Ako dlho trvá pre pozorovateľa v kozmickej lodi dej, ktorý prebieha na Zemi 1 hodinu.

Riešenie:

Rozbor:

$$v = 12\,000 \text{ km.s}^{-1} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}, \quad t_0 = 1 \text{ hod.} \quad t = ?$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t = \frac{1 \text{ hod}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1,2 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}}{3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}}\right)^2}} = \frac{1 \text{ hod}}{\sqrt{1 - (0,4 \cdot 10^{-1})^2}} = \frac{1 \text{ hod}}{\sqrt{1 - 0,0016}} = \frac{1 \text{ hod}}{\sqrt{0,9984}}$$

$$t = \frac{1 \text{ hod}}{0,9992} = 1,0008 \text{ hod} = 1 \text{ hod } 3 \text{ s}$$

$$t = 1 \text{ hod } 3 \text{ s}$$

Pre pozorovateľa v kozmickej lodi trvá dej asi 1 hodinu a 3 sekundy.

8. Akú vlnovú dĺžku má fotón, ktorého energia je rovnaká ako energia elektrónu pri rýchlosti $v = 0,6c$?

Riešenie:

Rozbor:

$v = 0,6c$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, $\lambda = ?$,

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} \quad \wedge \quad E = \frac{m_e \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$E_f = E$$

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{m_e \cdot c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{m_e \cdot c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\lambda \cdot m_e \cdot c = h \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$\lambda = \frac{h \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}{m_e \cdot c}$$

$$\lambda = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \sqrt{1 - 0,6^2}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} \text{ m} = \frac{6,625 \cdot 10^{-34} \cdot 0,8}{27,3 \cdot 10^{-23}} \text{ m} = 0,19 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 1,9 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

$$\lambda = 1,9 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Vlnová dĺžka fotónu je $\lambda = 1,9 \cdot 10^{-12} \text{ m}$.

(dokument nie je dokončený)