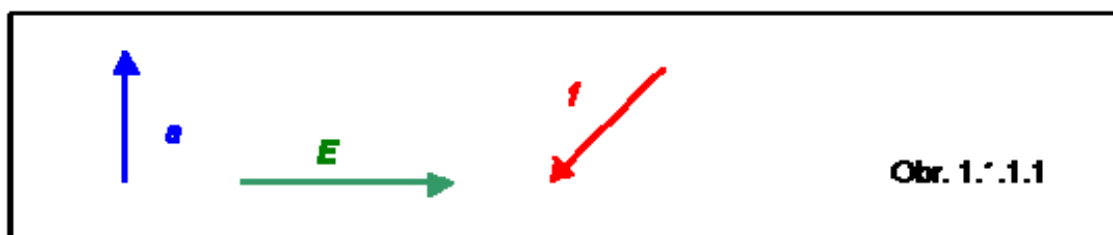


Označovanie vektorov

Presná **definícia** vektora, používaná v algebre, hovorí o n-tici čísel, ktorá sa istým definovaným spôsobom transformuje pri zmene súradnicovej sústavy. Pre naše účely vystačíme s konštatovaním, že vektorovej veličine vieme okrem veľkosti priradiť aj smer v priestore.

Vektory zapisujeme tučnými písmenami, napr. **a** , **E** , **ρ** , alebo ich označujeme šípkou nad písmenom. Značky všetkých veličín, teda aj vektorových, sa podľa normy STN ISO 31-0 majú písať ležatým písmom - kurzívou.

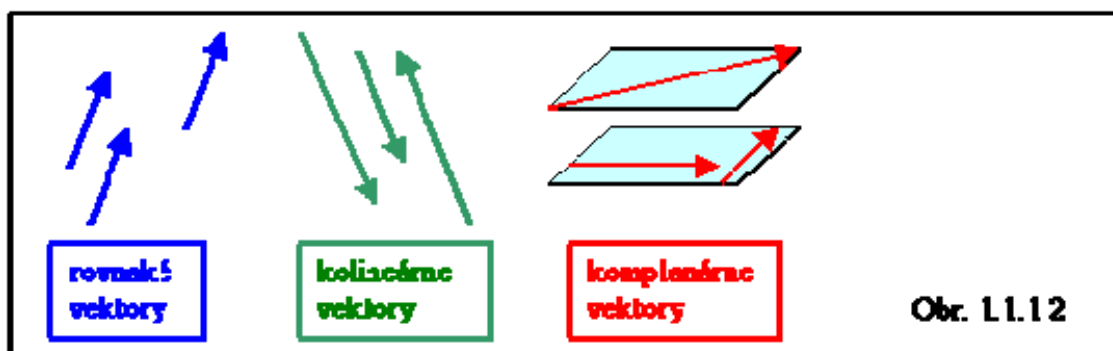
Veľkosť vektorových veličín sa zapisuje jednoduchým písmom (nie tučným, resp. bez šípky nad písmenom): b , E , f alebo sa vektor vloží medzi značky vyjadrujúce absolútnu hodnotu: $|a|$, $|E|$, $|f|$. Veľkosť vektora sa nazýva aj **absolútna hodnota**, je vždy nezáporná. Graficky sa vektorové veličiny **znázorňujú** úsečkou, so šípkou na jednom konci úsečky.



Miesto na úsečke opatrené šípkou sa považuje za "**koniec vektora**", na opačnej strane úsečky je "**začiatok vektora**".

Vektory rovnobežné s jednou priamkou nazývame **kolineárne**, vektory rovnobežné s jednou rovinou **komplanárne**. Kolineárne vektory môžu mať rovnaký, alebo navzájom opačný smer.

Dva vektory považujeme za rovnaké, ak majú rovnaký smer a rovnakú veľkosť (sú teda kolineárne).

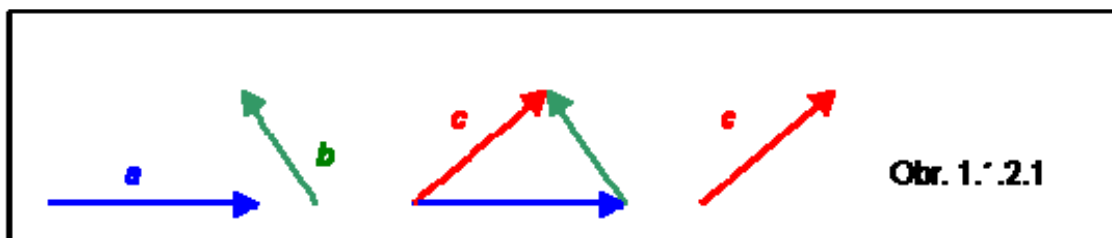


Kontrolné otázky

1. Ako označujeme vektory a ako ich veľkosti ?
2. Čo je absolútna hodnota vektora ?
3. Dva vektory, ktoré majú rovnakú veľkosť a rovnaký smer, nemajú spoločný začiatkový bod. Sú takéto vektory rovnaké ?
4. Dva rovnobežné vektory majú vzájomne opačný smer. Sú kolineárne ?
5. Kedy sú vektory komplanárne ?
6. Možno o dvoch rovnobežných vektoroch tvrdiť že sú komplanárne ?

Súčet a rozdiel vektorov

Súčet dvoch vektorov $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ je operácia, ktorej výsledkom je opäť vektor. Graficky sa znázorňuje pomocou úsečiek zobrazujúcich vektory: ku koncu prvého vektora pripojíme druhý vektor, pričom výsledkom ich sčítania je tretí vektor, ktorého začiatok je zhodný so začiatkom prvého vektora a koniec s koncom druhého vektora. V grafickom znázornení



Analogicky sa pokračuje pri sčítaní viacerých vektorov. Súčet vektorov je **komutatívna operácia**, čiže výsledok súčtu nezávisí od poradia skladania vektorov:

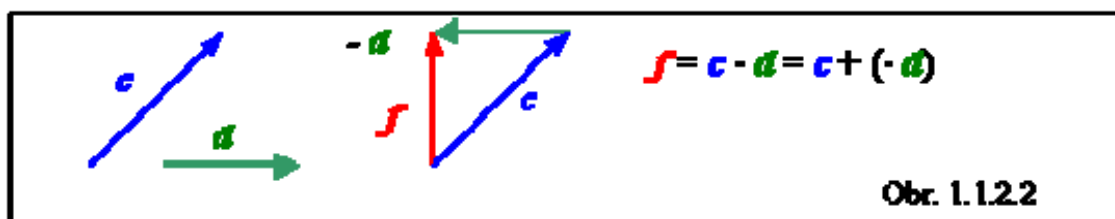
$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (1.1.2.1)$$

Pri sčítaní viacerých vektorov sa uplatňuje asociatívnosť, ktorú v prípade troch vektorov možno vyjadriť vzťahom

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (1.1.2.2)$$

Ak pred vektor napíšeme **znamienko "mínus"**, napríklad $-\mathbf{a}$, podľa zaužívanej dohody to predstavuje vektor, ktorý má rovnakú veľkosť ako vektor $\mathbf{a}$, ale má opačný smer. Nový vektor možno označiť ako vektor $\mathbf{b}$, a zapísať rovnosť $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$. Vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sú teda kolineárne.

Takéto označenie umožňuje zaviesť **odčítanie (rozdiel) vektorov**. Rozdiel dvoch vektorov $\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{f}$ chápeme ako súčet vektorov $\mathbf{c}$ a $(-\mathbf{d})$, t.j. $\mathbf{f} = \mathbf{c} + (-\mathbf{d})$. Pritom rovnicu $\mathbf{c} - \mathbf{d} = \mathbf{f}$ možno upraviť rovnako, ako rovnicu s obyčajnými číslami, napríklad vektor $\mathbf{d}$ previesť na pravú stranu rovnice: $\mathbf{c} = \mathbf{d} + \mathbf{f}$. Takto upravená rovnica môže poslúžiť na overenie správnosti vykonanej operácie.

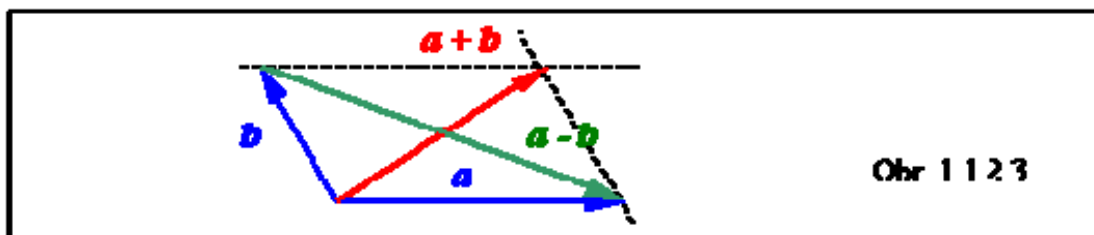


Na súčte vektorov si možno názorne ukázať význam používania vektorového označovania. Ak pri súčte dvoch vektorov platí rovnosť $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ nie sú kolineárne vektory, potom pre ich veľkosti platí trojuholníková nerovnosť $a + b > c$. Keby sme vynechali označenie vektorov, napísali by sme nesprávnu rovnicu $a + b = c$. **Dôsledné používanie označovania vektorov je preto veľmi dôležité.**

Príklad 1.1.2.1

Dva nekolineárne vektory, napr. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, môžeme chápať ako strany rovnobežníka. Graficky ukážte, že ich súčet a rozdiel predstavujú uhlopriečky tohto rovnobežníka.

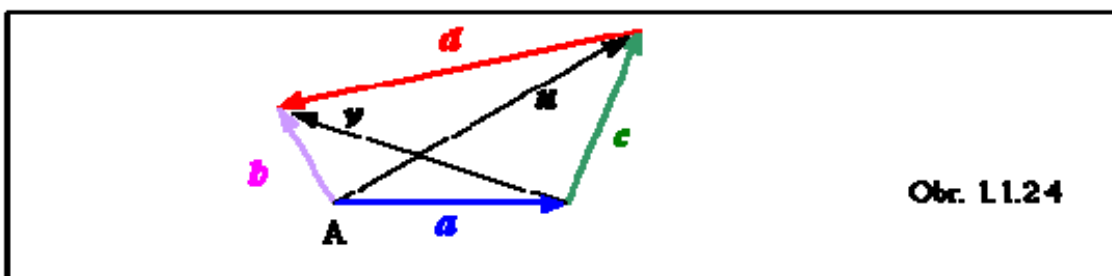
Riešenie



Súčet vektorov má časté uplatnenie v praxi. Napríklad sčítaním vektora rýchlosti lode vzhľadom na vodu s vektorom rýchlosti vody v rieke, dostaneme vektor rýchlosti lode vzhľadom na breh rieky.

Príklad 1.1.2.2

Nakreslite štvoruholník, ktorého strany nie sú rovnako dlhé. Dokážte, že ak by sa uhlopriečky štvoruholníka pretínali vo svojich stredoch, musel by to byť rovnobežník. (Obr. 1.1.2.4)



Riešenie

Najprv treba označiť všetky štyri strany štvoruholníka ako vektory. Podľa obrázku dokážeme určiť vektory smerujúce z vrcholu A do stredov uhlopriečok. Do streda uhlopriečky u smeruje vektor $\mathbf{p} = (1/2)\mathbf{u} = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ a do streda uhlopriečky v vektor $\mathbf{q} = \mathbf{a} + (1/2)(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Ak majú byť stredy uhlopriečok totožné, musia byť vektory $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ rovnaké: $(1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (1/2)(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, z čoho bezprostredne vyplýva rovnosť vektorov $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$. Majú teda rovnakú veľkosť aj smer, preto sú rovnobežné, tvoria dve strany rovnobežníka. Výsledok pre ďalšie dve strany získame úvahou o vektore $\mathbf{u}$. Platí $\mathbf{u} = \mathbf{c} + \mathbf{a}$ a súčasne $\mathbf{u} + \mathbf{d} = \mathbf{b}$, čiže $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{d}$ a s využitím rovnosti $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ aj $\mathbf{u} = \mathbf{c} - \mathbf{d}$. Porovnaním dvoch vyjadrení vektora $\mathbf{u}$ dospejeme k výsledku $\mathbf{a} = -\mathbf{d}$. Teda aj tieto vektory sú rovnobežné, majú rovnakú veľkosť, ale opačný smer.

Kontrolné otázky

1. Slovné vyjadrite postup pri grafickom sčítaní dvoch vektorov
2. Oplyvní zámena poradia vektorov pri súčte výsledok ?
3. Je sčítanie dvoch vektorov komutatívna operácia ?
4. Je sčítanie viacerých vektorov asociatívna operácia ?
5. Na príklade názorne vysvetlite asociatívnosť súčtu vektorov !
6. Čo znamená znamienko mínus pred vektorom ?
7. Ako je definované odčítanie dvoch vektorov ?
8. K akým dôsledkom môže viesť nepoužívanie označenia vektorov ?

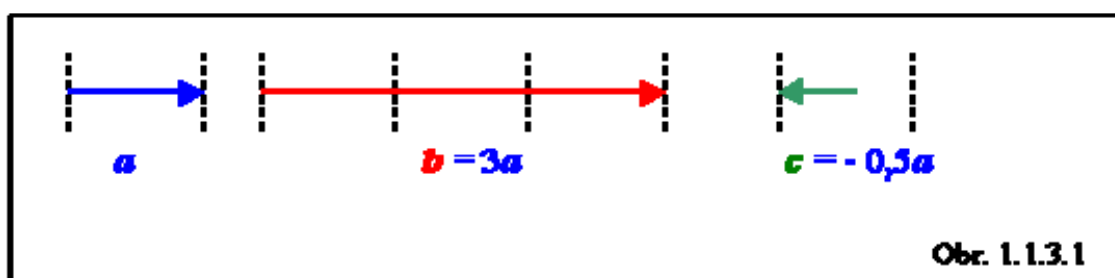
9. Uvedte príklad z praxe, kde sa uplatňuje sčítanie vektorov !

Skalárny násobok vektora, jednotkový vektor

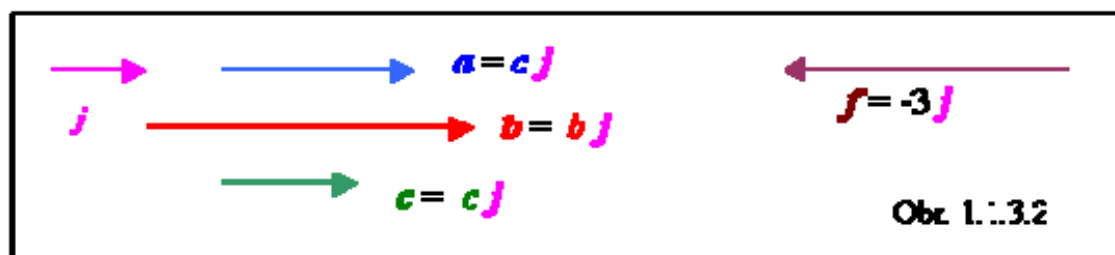
Násobenie vektora číslom je operácia, ktorá poskytne nový vektor so zmenenou veľkosťou, ale kolineárny s pôvodným vektorom. Napríklad vynásobením vektora $\mathbf{a}$ číslom 3 získame vektor $\mathbf{b}$ s trojnásobnou veľkosťou a nezmeneným smerom. Ak však vektor $\mathbf{a}$ budeme násobiť číslom $-0,5$, dostaneme vektor $\mathbf{c}$ s polovičnou veľkosťou, navyše s opačným smerom. Je to ďalšie pravidlo vektorovej algebry. Všeobecne tento vzťah zapisujeme v tvare

$$\mathbf{b} = s\mathbf{a} \quad (1.1.3.1)$$

kde s môže predstavovať nie iba bezrozmerné číslo, ale aj skalárnu veličinu. Napríklad v kinematike sa stretneme s výrazom $\mathbf{at}$, teda súčinom vektora zrýchlenia a času. Tak dostaneme novú fyzikálnu veličinu, ktorej veľkosť a fyzikálny rozmer sú súčinom veľkostí, resp. rozmerov vektorovej a skalárnej veličiny. V literatúre o vektorovom počte sa táto operácia nazýva **skalárny násobok vektora**.



Jednotkový vektor má veľkosť rovnajúcu sa číslu 1, je bezrozmerný. S výhodou ho možno použiť na vyjadrenie viacerých vektorov, ktoré sú s ním rovnobežné. Nech $\mathbf{j}$ je jednotkový vektor, a nech vektory $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ sú s ním súhlasne rovnobežné. Preto ich možno vyjadriť ako skalárne násobky jednotkového vektora, pričom skalármi, ktorými jednotkový vektor násobíme, sú veľkosti týchto vektorov : $\mathbf{a} = a\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = b\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = c\mathbf{j}$. Situácia sa môže skomplikovať, ak niektorý z vektorov má opačný smer ako jednotkový vektor. Vtedy pred skalárny násobok vektora $\mathbf{j}$ treba pripísať znamienko "mínus", napr. $\mathbf{f} = -3\mathbf{j}$. (Pozri ďalej - rozklad vektora, súradnice vektora).



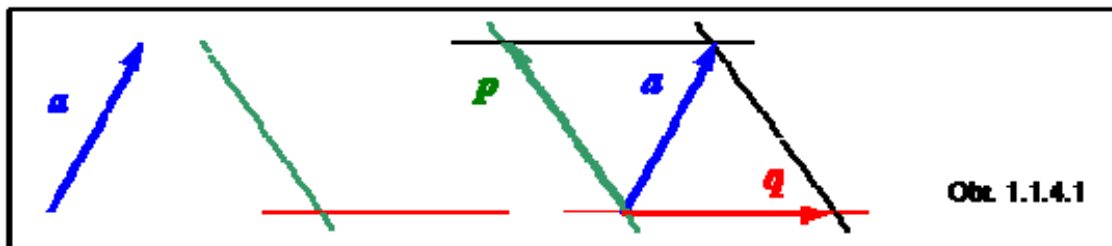
Kontrolné otázky

1. Ako možno z daného vektora vytvoriť vektor opačného smeru, navyše s päťnásobnou veľkosťou ? Ako sa príslušná operácia nazýva ?
2. Aké vlastnosti má jednotkový vektor ?
3. Získame súčtom dvoch vzájomne kolmých jednotkových vektorov opäť jednotkový vektor ?

Zložky súradnice vektora

Rozklad vektora na zložky je opačná operácia ako súčet vektorov. V rovine možno vektor rozložiť na dve zložky, t.j. na dva vektory do vopred určených smerov. Sčítaním zložiek

vznikne pôvodný vektor. Na obr. 1.1.4.1 je znázornený rozklad vektora $\mathbf{a}$ do smerov naznačených dvomi priamkami. Uskutočňuje sa tak, že priamky, do smerov ktorých treba vektor rozložiť, vedieme koncovým aj začiatočným bodom vektora. Tak vznikne rovnobežník, na ktorom už jednoducho vyznačíme zložky $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$.



V priamkach, do ktorých rozkladáme vektor $\mathbf{a}$, môžeme zvoliť jednotkové vektory, ktoré označíme $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Jednotkovými vektormi sú potom určené príslušné smery. Zložky $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ vyjadríme ako skalárne násobky vektorov $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$: $\mathbf{p} = a_p \mathbf{e}_1$, $\mathbf{q} = a_q \mathbf{e}_2$. Vektor $\mathbf{e}_1$ však môže mať opačný smer ako zložka $\mathbf{p}$, a vtedy skalár a_p pred vektorom $\mathbf{e}_1$ musí byť záporný. Preto skalár a_p nepredstavuje veľkosť vektora $\mathbf{p}$, ale je jednou zo súradníc rozloženého vektora $\mathbf{a}$ vo vzťažnej sústave určenej vektormi $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$. Vektor $\mathbf{a}$ možno po takomto rozklade na zložky vyjadriť v tvare

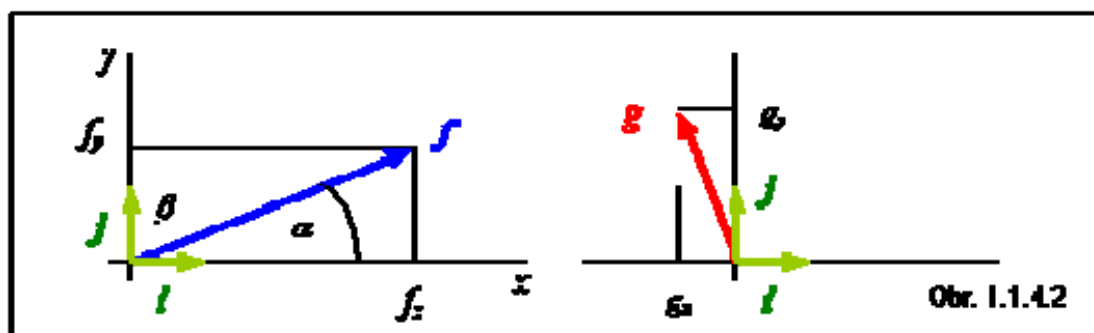
$$\mathbf{a} = \mathbf{p} + \mathbf{q} = a_p \mathbf{e}_1 + a_q \mathbf{e}_2 \quad (1.1.4.1)$$

O takomto vyjadrení hovoríme, že vektor $\mathbf{a}$ je **lineárnou kombináciou vektorov** $\mathbf{e}_1$ a $\mathbf{e}_2$.

V trojrozmernom priestore musí byť vzťažná sústava určená tromi vektormi $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$ o ktorých hovoríme, že tvoria jej **bázu**. Vo všeobecnosti to ani nemusia byť jednotkové vektory. Najčastejšie sa však používa rozklad do troch navzájom kolmých smerov, určených jednotkovými vektormi so zaužívaným označením $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Stotožňujú sa s osami x , y , z karteziánskej súradnicovej sústavy. Ľubovoľný vektor $\mathbf{f}$ možno pomocou takejto trojice jednotkových vektorov vyjadriť ako ich lineárnu kombináciu

$$\mathbf{f} = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \quad (1.1.4.2)$$

V tomto vyjadrení vektora $\mathbf{f}$ sú f_x , f_y a f_z jeho **súradnice**, ktoré môžu byť kladné, i záporné podľa toho, aký je jeho smer vzhľadom na jednotkové vektory. Na obr. 1.1.4.2 je znázornený dvojrozmerný prípad, pričom vektor $\mathbf{g}$ má zápornú súradnicu g_x , ostatné súradnice vektorov $\mathbf{f}$ a $\mathbf{g}$ sú kladné.



Veľkosť vektora $\mathbf{f}$ možno v karteziánskej súradnicovej sústave vyjadriť pomocou jeho súradníc, použitím Pythagorovej vety

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \quad (1.1.4.3)$$

Vektor $\mathbf{f}$ zvierá s vektormi $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ **smerové uhly** α , β , γ , pre ktoré platia vzťahy

$$\cos \alpha = \frac{f_x}{f}, \quad \cos \beta = \frac{f_y}{f}, \quad \cos \gamma = \frac{f_z}{f} \quad (1.1.4.4)$$

ktoré si možno overiť na dvojrozmernom obrázku 1.1.4.2.

Zo vzťahov (1.1.4.4) pre kosínusy smerových uhlov (*smerové kosínusy*) bezprostredne vyplýva rovnosť

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.1.4.5)$$

Súčet vektorov a skalárny násobok vektora možno výhodne počítať, keď vektory vyjadríme **v zložkovom tvare**. Napríklad ak $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}$ potom môžeme ich súčet uskutočniť po zložkách, na základe platnosti komutatívnosti a asociatívosti sčítania vektorov :

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k} \quad (1.1.4.6)$$

takže pre súradnice výsledného vektora $\mathbf{c}$ platí

$$c_x = (a_x + b_x), \quad c_y = (a_y + b_y), \quad c_z = (a_z + b_z) \quad (1.1.4.7)$$

Pre **skalárny násobok** vektora vyjadreného v zložkách platí:

$$\mathbf{d} = s\mathbf{a} = s(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = sa_x \mathbf{i} + sa_y \mathbf{j} + sa_z \mathbf{k}$$

pričom pre jeho súradnice platí

$$d_x = sa_x, \quad d_y = sa_y, \quad d_z = sa_z \quad (1.1.4.8)$$

Príklad 1.1.4.1

Vypočítajte súčet vektorov $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ a $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Riešenie

$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (3 - 1)\mathbf{i} + (2 + 2)\mathbf{j} + (-1 - 2)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, takže súradnice vektora $\mathbf{c}$ sú: $c_x = 2$, $c_y = 4$, $c_z = -3$

Príklad 1.1.4.2

Vyjadrite vektor $\mathbf{d}$, ktorý má trojnásobnú veľkosť a opačný smer ako vektor $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Riešenie

$\mathbf{d} = (-3)\mathbf{a} = (-3)(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = -9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Presvedčte sa, že veľkosť vektora $\mathbf{d}$ je naozaj trojnásobná v porovnaní s veľkosťou vektora $\mathbf{a}$.

Kontrolné otázky

1. Ako rozkladáme vektor (v rovine) do dvoch vopred zadaných smerov ?
2. Možno vektor rozložiť do dvoch smerov, ktoré zvierajú uhol väčší než 90° ?
3. Uvedte čo rozumieme pod lineárnou kombináciou vektorov !
4. Uvedte, čo je báza vektorov !
5. Ako sa vypočíta veľkosť vektora, keď sú známe jeho súradnice ?
6. Ako sa zmenia zložky vektora, keď ho vynásobíme skalárom ?
7. Ako sa zmenia súradnice vektora, keď ho vynásobíme skalárom ?
8. Vyjadrite súčet dvoch vektorov pomocou ich súradníc !
9. Uvedte, ako vypočítate uhol ktorý vektor zvierá s osou y , keď poznáte jeho súradnice !

Vektorový súčin

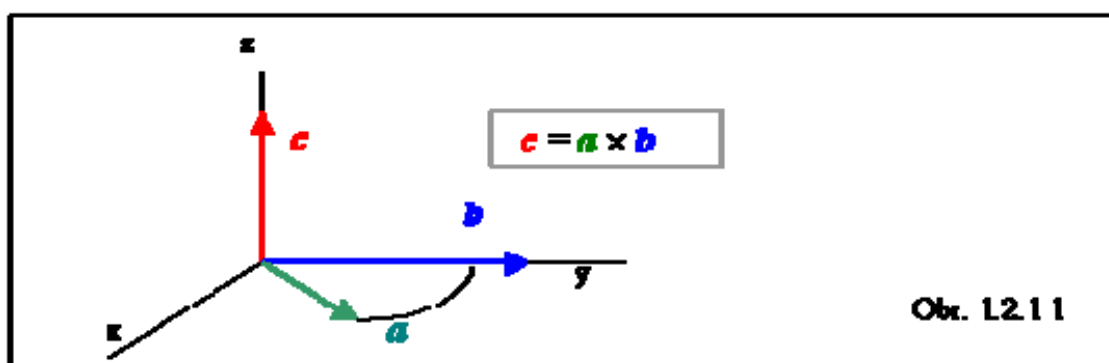
Vektorový súčin dvoch vektorov je zavedený ako operácia, ktorej výsledkom je vektor. Preto treba definovať nie iba **veľkosť** výsledku, ale aj **smer** výsledného vektora. Vektorový súčin sa označuje krížikom medzi vektormi:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (1.2.2.1)$$

Veľkosť c výsledného vektora $\mathbf{c}$ je definovaná ako súčin veľkostí násobených vektorov a sínusu uhla nimi zovretého:

$$c = ab \sin \alpha \quad (1.2.2.2)$$

Pre smer vektora $\mathbf{c}$ platí definícia, že je kolmý na rovinu násobených vektorov. Jednoznačnosť definície však vyžaduje určiť, na ktorú stranu roviny smeruje. Vektor $\mathbf{c}$ má taký smer, že z jeho konca sa stotožnenie prvého vektora zo súčinu (v tomto prípade vektora $\mathbf{a}$) s druhým vektorom po kratšom oblúku javí ako pohyb proti chodu hodinových ručičiek. O trojici vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ v danom poradí potom hovoríme, že tvoria **pravotočivú sústavu vektorov**. Zmena ich poradia jednou permutáciou znamená zmenu z pravotočivej na ľavotočivú sústavu (trojicu).



Na obr. 1.2.1.1 je trojica vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ znázornená v axonometrickom pohľade. Pre názornosť sú nakreslené aj súradnicové osi karteziánskej sústavy, vektor $\mathbf{a}$ leží v rovine (x,y) . Vektor $\mathbf{a}$ budeme otáčať smerom k vektoru $\mathbf{b}$ po kratšom oblúku. Ak rovnako budeme otáčať pravotočivú skrutku, umiestnenú v začiatku súradnicovej sústavy - kolmo na rovinu vektorov $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ - skrutka sa bude posúvať v smere vektora $\mathbf{c}$. Aj tento model pomáha pri určovaní smeru vektora, ktorý je výsledkom vektorového súčinu.

Niektoré **vlastnosti vektorového súčinu**

- Vektorový súčin nie je komutatívna operácia, lebo zámena poradia vektorov poskytuje síce vektor rovnako veľký, ale opačného smeru. Táto skutočnosť sa zapisuje v tvare

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = - \mathbf{b} \times \mathbf{a} \quad (1.2.2.3)$$

- Veľkosť vektorového súčinu dvoch vektorov možno interpretovať ako plošný obsah rovnobežníka vytvoreného týmito vektormi. Navyše výsledný vektor jednoznačne určuje orientáciu roviny v priestore, preto ho možno chápať ako vektor priradený ploche.
- Z definície veľkosti vektorového súčinu vyplýva, že vektorový súčin dvoch kolineárnych vektorov sa rovná nule (je nulový vektor).
- Pre jednotkové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, ktoré sú navzájom na seba kolmé, platia vzťahy:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \end{aligned} \quad (1.2.2.4)$$

- Pre vektorový súčin platí distributívny zákon:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} \quad (1.2.2.5)$$

Dva prípady distributívneho zákona sú uvedené preto, lebo vo vektorovom súčine nemožno zamieňať poradie vektorov bez zmeny znamienka.

- Na základe distributívneho zákona vektorový súčin vektorov vyjadrených v zložkovom tvare môžeme vyjadriť nasledovne :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\
 &= a_x b_x (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) + \\
 &\quad + a_y b_x (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + \\
 &\quad + a_z b_x (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = \\
 &= 0 + a_x b_y \mathbf{k} - a_x b_z \mathbf{j} - a_y b_x \mathbf{k} + 0 + a_y b_z \mathbf{i} + \\
 &\quad + a_z b_x \mathbf{j} - a_z b_y \mathbf{i} + 0 = \\
 &= \mathbf{i} (a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j} (a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k} (a_x b_y - a_y b_x) \quad (1.2.2.6)
 \end{aligned}$$

Čitateľovi, ktorý pozná determinanty je zrejmé, že posledný výraz možno formálne vyjadriť ako determinant:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (1.2.2.7)$$

S vektorovým súčinom sa stretneme napríklad pri vyjadrení momentu sily $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor pôsobiska sily $\mathbf{f}$, alebo pri vzťahu pre silu $\mathbf{f}$ pôsobiacu na elektrický náboj q pohybujúci sa v magnetickom poli s magnetickou indukciou $\mathbf{B}$: $\mathbf{f} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Príklad 1.2.2.1

Určte plošný obsah trojuholníka určeného vektormi $\mathbf{a} = 5 \mathbf{i}$ a $\mathbf{b} = 4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$. (Pozri príklad 1.2.1.1, kde je obrázok)

Riešenie

Veľkosť vektorového súčinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ predstavuje plošný obsah rovnobežníka vytvoreného pomocou týchto vektorov, plošný obsah trojuholníka je jeho polovicou. Mohli by sme postupovať tak, že vypočítame veľkosti vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a uhol medzi nimi (pomocou vzorca (1.2.1.7)), vypočítame veľkosť vektorového súčinu $ab \sin \alpha$ a vydělíme ho dvomi. Pri šikovnejšom postupe najprv vypočítame výsledný vektor $\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{u} = (5 \mathbf{i}) \times (4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}) = (5 \times 4)(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + (5 \times 3)(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = 15 \mathbf{k},$$

a z výsledku bezprostredne vidíme, že veľkosť vektora $\mathbf{u}$ je 15. Preto plošný obsah trojuholníka je 7,5 jednotiek.

Príklad 1.2.2.2

V priestore sú zadané tri body $A(2,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,3)$, ktorými je určená rovina. Vyjadrite jednotkový vektor kolmý na túto rovinu. Nakreslite si obrázok!

Riešenie

Základnou myšlienkou riešenia je využitie vektorového súčinu, ktorého výsledkom je vektor kolmý na rovinu násobených vektorov. Preto stačí nájsť dva vektory, ktoré ležia v príslušnej rovine. Takýmito sú vektory, ktoré spájajú zadané tri body. Získame ich ako rozdiel vektorov spájajúcich začiatok súradnicovej sústavy a zadané body. Do bodu A smeruje vektor $\mathbf{a} = 2 \mathbf{i}$, do ďalších bodov vektory $\mathbf{b} = \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3 \mathbf{k}$. Vektor vychádzajúci z bodu A a končiaci v bode B je $\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \mathbf{j} - 2 \mathbf{i}$, vektor vychádzajúci z bodu A a končiaci v bode C je $\mathbf{w} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = 3 \mathbf{k} - 2 \mathbf{i}$. Potom vypočítame vektorový súčin $\mathbf{h} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} = (\mathbf{j} - 2 \mathbf{i}) \times (3 \mathbf{k} - 2 \mathbf{i}) = 3 \mathbf{i} + 2 \mathbf{k} + 6 \mathbf{j}$. Výsledný vektor $\mathbf{h}$ je kolmý na rovinu prechádzajúcu bodmi A, B, C. Jednotkový vektor kolmý na túto rovinu získame, ak vektor $\mathbf{h}$ vydělíme jeho veľkosťou

$$h = (3^2 + 2^2 + 6^2)^{1/2} = (49)^{1/2} = 7.$$

Pre jednotkový vektor tak dostaneme:

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{h} / 7 = (3/7) \mathbf{i} + (2/7) \mathbf{j} + (6/7) \mathbf{k} .$$

Príklad 1.2.2.3

Vypočítajte skalárny násobok vektorového súčinu vektorov $\mathbf{a} = 5 \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$ z príkladu (1.2.2.1) skalárom $p = 2$.

Riešenie

$$p\mathbf{c} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = p[(5\mathbf{i}) \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] = p(15\mathbf{k}) = 30\mathbf{k} .$$

Poznámka : Rovnaký výsledok dostaneme, ak skalárom p vynásobíme niektorý z vektorov $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ešte pred uskutočnením vektorového súčinu :

$$\text{a) } p\mathbf{c} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (p\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = (10\mathbf{i}) \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 30\mathbf{k}$$

$$\text{b) } p\mathbf{c} = p(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (p\mathbf{b}) = (5\mathbf{i}) \times (8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) = 30\mathbf{k}$$

Z výsledku vyplýva významné pravidlo, že nezáleží na tom, ktorému z vektorov vektorového súčinu priradíme skalár, ktorým vektorový súčin násobíme.

Kontrolné otázky

1. Akú veľkosť má vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov ?
2. Aký smer má vektor, ktorý vznikne ako vektorový súčin dvoch vektorov ?
3. Čo znamená, ak trojica vektorov tvorí pravotočivú sústavu ?
4. Ako vytvoríme z pravotočivej sústavy troch vektorov ľavotočivú sústavu ?
5. Je vektorový súčin komutatívna operácia ?
6. Aký je geometrický význam vektorového súčinu dvoch vektorov ?
7. Dokážete vyjadriť všetky možné kombinácie vektorových súčinov medzi vektormi $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$?
8. Ako vyjadrujeme distributívnosť vektorového súčinu ?
9. Viete vyjadriť vektorový súčin v tvare determinantu ?
10. Pri násobení vektorového súčinu skalárom - možno vopred skalárom vynásobiť niektorý z vektorov súčinu, alebo až výsledný vektor ?

Zmiešaný súčin

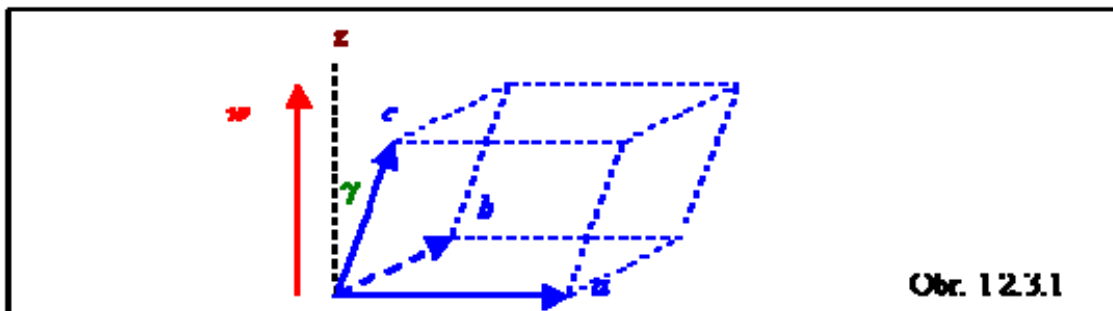
Zmiešaný súčin troch **vektorov** je operácia, v ktorej sa uskutoční najprv vektorový a po ňom skalárny súčin. Medzi tromi vektormi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ je možných viacero variantov zmiešaného súčinu, napríklad:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}, (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} \quad (1.2.3.1)$$

Výsledkom je vždy skalárna veličina, ktorá môže byť kladná, nulová i záporná.

Niektoré **vlastnosti zmiešaného súčinu**:

- Výraz $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, nie je zmiešaný súčin, lebo výraz v zátvorke je skalárna veličina, ktorou nemožno vektor $\mathbf{c}$ násobiť vektorovo.
- Zmiešaný súčin má význam objemu rovnobežnostena skonštruovaného na základe vektorov zmiešaného súčinu. Na obrázku 1.2.3.1 je nakreslený rovnobežnostenzostrojený pomocou vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, ako aj priamka z kolmá na rovinu vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.



- Zmiešaný súčin $S = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vypočítame podľa pravidiel vektorového a skalárneho súčinu. Výsledkom vektorového súčinu $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ je vektor (označme ho $\mathbf{w}$) kolmý na ich rovinu, teda vektor, ktorý má veľkosť $ab \sin \alpha$ a je rovnobežný s priamkou z . Vektor $\mathbf{w}$ zvierá s vektorom $\mathbf{c}$ uhol γ , ktorého kosínus vstupuje do výrazu pre skalárny súčin medzi vektormi $\mathbf{w}$ a $\mathbf{c}$. Pre výsledok zmiešaného súčinu tak dostaneme $S = (ab \sin \alpha) c \cos \gamma$. Výraz $c \cos \gamma$ súčasne predstavuje výšku rovnobežnostena, pričom veľkosť vektorového súčinu $ab \sin \alpha$ je plošný obsah jeho základne. Preto zmiešaný súčin má význam objemu rovnobežnostena.
- Rovnaký výsledok dostaneme aj pomocou zmiešaných súčinov $(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$ a $(\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$, teda súčini, v ktorých sme urobili cyklickú zmenu poradia vektorov, pri zachovaní polohy zátvoriek, ako aj značiek vektorového a skalárneho súčinu. Preto platia rovnosti

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \times \mathbf{b} \quad (1.2.3.2)$$

- Ak si uvedomíme komutatívnosť skalárneho súčinu, môžeme napísať rovnosť

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \quad (1.2.3.3)$$

Porovnaním posledných členov rovností (1.2.3.2) a (1.2.3.3) dostaneme výsledok

$$(\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \quad (1.2.3.4)$$

ktorý interpretujeme ako možnosť premiestnenia zátvoriek, pri súčasnej výmene značiek vektorového a skalárneho súčinu.

- Zmiešaný súčin je kladný, ak vektory v zmiešanom súčine, v takom poradí ako sú napísané, tvoria pravotočivú sústavu. Zámenou poradia ľubovoľných dvoch vektorov v zmiešanom súčine, zmení sa jeho znamienko. Ak je zmiešaný súčin záporný, objemu rovnobežnostena sa vtedy rovná jeho absolútna hodnota.
- Nulová hodnota zmiešaného súčinu znamená, že príslušné vektory sú komplanárne.
- Zmiešaný súčin možno vyjadriť pomocou determinantu, pričom v jednom riadku sú súradnice jedného vektora. K tomuto tvrdeniu môžeme dospieť, keď si všimneme zápis vektorového súčinu pomocou vzťahov (1.2.2.6) a (1.2.2.7). Ak výraz (1.2.2.6) skalárne vynásobíme vektorom $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$, dostaneme

$$(c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) \times [\mathbf{i}(a_y b_z - a_z b_y) + \mathbf{j}(a_z b_x - a_x b_z) + \mathbf{k}(a_x b_y - a_y b_x)] =$$

$$= c_x (a_y b_z - a_z b_y) + c_y (a_z b_x - a_x b_z) + c_z (a_x b_y - a_y b_x),$$

takže je zrejmé, že tento zmiešaný súčin možno vyjadriť ako determinant

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1.2.3.5)$$

Zápisom zmiešaného súčinu v tvare determinantu možno overiť pravidlo o cyklickej zmene poradia vektorov, ako aj o zmene znamienka pri zámene poradia dvoch vektorov. Zámena poradia dvoch vektorov sa v determinante prejaví ako zámena dvoch riadkov, ktorej dôsledkom je zmena znamienka determinantu.

Príklad 1.2.3.1

Vypočítajte zmiešaný súčin $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ pričom vektory sú zadané v zložkovom tvare : $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Overte si, že rovnaký výsledok dostanete, ak v zmiešanom súčine urobíte cyklickú zmenu poradia vektorov.

Riešenie

Výpočtom vektorového súčinu sa presvedčíme, že $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 15\mathbf{k}$. Výsledok vynásobíme skalárne vektorom $\mathbf{c}$: $(15\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 15$.

Pre zmiešaný súčin $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ dostaneme rovnaký výsledok : $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i}) = 5\mathbf{k} + 5\mathbf{j}$ a ďalej $(5\mathbf{k} + 5\mathbf{j}) \times (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = 15$.

Kontrolné otázky

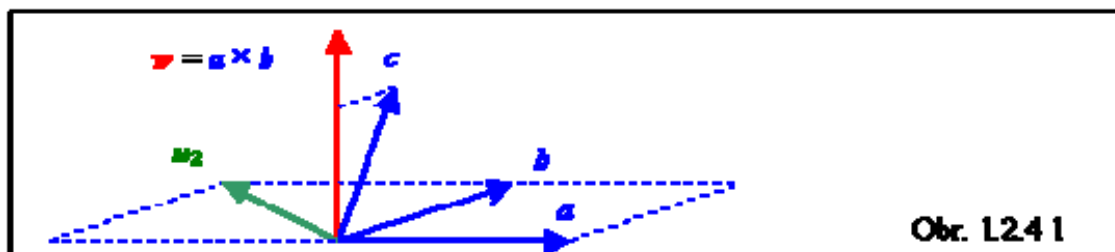
1. Uvedte možné varianty zmiešaného súčinu troch vektorov !
2. Aký je geometrický význam zmiešaného súčinu ? Zdôvodnite svoje tvrdenie !
3. Viete zdôvodniť pravidlo o posune zátvoriek a súčasnej zámene "bodky a krížika" v zmiešanom súčine ?
4. Kedy je zmiešaný súčin kladný, záporný, nulový ?
5. Vyjadrite zmiešaný súčin troch vektorov v tvare determinantu !
6. Čo sa zmení na zmiešanom súčine, ak v ňom zmením poradie dvoch vektorov ?

Dvojnásobný vektorový súčin

Dvojnásobný vektorový súčin medzi tromi vektormi $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ môže mať dva tvary , pokiaľ dodržíme určené poradie vektorov :

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad \text{a} \quad (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \quad (1.2.4.1)$$

Zo zápisu je zrejmé, že výsledkom dvojnásobného vektorového súčinu je vektorová veličina. Uvedené dva tvary neposkytujú rovnaký výsledok. Výsledkom súčinu vektorov nachádzajúcich sa v zátvorke je v oboch prípadoch vektor , ktorý je na ich rovinu kolmý (označme si ho ako $\mathbf{w}$, obr. 1.2.4.1). Súčinom vektora $\mathbf{w}$ s ďalším vektorom je vektor $\mathbf{u}$, ktorý je kolmý aj na vektor $\mathbf{w}$, takže $\mathbf{u}$ musí ležať v rovine vektorov, ktoré sú uvedené v zátvorke. To znamená, že výsledok dvojnásobného vektorového súčinu $\mathbf{u}$ možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov, nachádzajúcich sa v zátvorke. V prvom prípade výsledný vektor $\mathbf{u}_1$ leží v rovine vektorov $\mathbf{b}, \mathbf{c}$ a v druhom prípade výsledný vektor $\mathbf{u}_2$ leží v rovine vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Druhý prípad je nakreslený na obrázku.



Pre výsledné vektory platia nasledujúce vzorce:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - \mathbf{c} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (1.2.4.2)$$

$$\mathbf{u}_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (1.2.4.3)$$

Správnosť týchto vzorcov možno dokázať celkom všeobecným postupom, ktorý je však náročný a pomerne rozsiahly. Preto si jeden zo vzorcov, a to (1.2.4.3), odvodíme

zjednodušeným postupom na príklade troch ľubovoľných nekomplanárnych vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, v špeciálne zvolenej karteziánskej súradnicovej sústave. Súradnicovú os x zvolíme tak, aby bola rovnobežná s vektorom $\mathbf{a}$, takže $\mathbf{a}$ bude mať len jednu zložku, a to rovnobežnú s jednotkovým vektorom $\mathbf{i}$: $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i}$. Os y zvolíme tak, aby rovina (xy) bola rovnobežná s rovinou určenou vektormi $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Vtedy vektor $\mathbf{b}$, pokiaľ nie je kolmý na $\mathbf{a}$, bude mať dve zložky: $\mathbf{b} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}$. Os z karteziánskej sústavy je tým už jednoznačne určená, a tak vektor $\mathbf{c}$, ak chceme uvažovať čo najvšeobecnejšie, musí mať tri zložky: $\mathbf{c} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$

Súhrnne:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= a_x \mathbf{i} \\ \mathbf{b} &= b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}, \\ \mathbf{c} &= c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}\end{aligned}\quad (1.2.4.5)$$

Potom dvojnásobný vektorový súčin $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vypočítame:

$$\begin{aligned}&= [a_x \mathbf{i} \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j})] \times (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) = [a_x b_y \mathbf{k}] \times (c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_y c_x \mathbf{j} - a_x b_y c_y \mathbf{i} + (a_x b_x c_x \mathbf{i} - a_x b_x c_y \mathbf{j})\end{aligned}$$

Výraz v zátvorke v poslednom riadku nie je výsledkom priameho výpočtu, rovná sa nule, a to, že sme ho pridali do výpočtu, je len súčasťou nášho zjednodušeného postupu. Vhodným pospájaním členov posledného riadku dostaneme:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (a_x c_x) (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j}) - (b_x c_x + b_y c_y) (a_x \mathbf{i})$$

Keď si uvedomíme, že platí

$$a_x c_x = \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad \text{a} \quad b_x c_x + b_y c_y = \mathbf{b} \times \mathbf{c},$$

čo si ľahko overíme vypočítaním týchto skalárnych súčinov vychádzajúc zo zadania vektorov (1.2.4.5), dostaneme konečný výsledok

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b} (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Podobne možno odvodiť aj vzorec (1.2.4.2), pričom opäť sa overí zásada, že výsledný vektor, výsledok dvojnásobného vektorového súčinu, možno vyjadriť ako lineárnu kombináciu vektorov ležiacich v rovine vektorov uvedených v zátvorke.

Dvojnásobný vektorový súčin sa často využíva pri vyjadrovaní vzťahov v mechanike, ale aj elektromagnetizme.

Príklad 1.2.4.1

Vypočítajte dvojnásobný vektorový súčin $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ vektorov: $\mathbf{a} = 5 \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2 \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ a overte si, že výsledný vektor leží v rovine vektorov $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ ležia v rovine xy , takže výsledný vektor by mal mať len zložky rovnobežné s jednotkovými vektormi $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. Nakreslite si obrázok.

Riešenie

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = [5 \mathbf{i} \times (4 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j})] \times (2 \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = [15 \mathbf{k}] \times (2 \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 30 \mathbf{j} + 15 \mathbf{i}$$

Kontrolné otázky

1. Napíšte dva možné varianty dvojnásobného vektorového súčinu !
2. V ktorej rovine leží výsledný vektor dvojnásobného vektorového súčinu ? Zdôvodnite svoje tvrdenie !
3. Napíšte vzorce vyjadrujúce výsledný vektor získaný dvojnásobným vektorovým súčinom !
4. Čím sa navzájom odlišujú výsledky súčinov $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$?
5. Čím sa navzájom odlišujú výsledky súčinov $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$?