

Meno a priezvisko:

Škola:

Predmet:

Školský rok/blok:

Skupina:

Trieda:

Dátum:

Bilingválne gymnázium C. S. Lewisa, Beňadická 38, Bratislava

Fyzika

2008-2009 / D

Teória

Gravitačné pole

Newtonov gravitačný zákon; Gravitačné pole; Intenzita gravitačného poľa; Gravitačný potenciál; Gravitačné pole Zeme; Pohyby v gravitačnom poli Zeme; Pohyby v radiálnom gravitačnom poli Zeme; Slnecná sústava

4.1 Newtonov gravitačný zákon

Pozorovania a experimenty potvrdzujú, že hmotné objekty pôsobia na seba príťažlivými silami. Tento druh interakcie, ktorej sa zúčastňujú všetky hmotné objekty, sa nazýva **gravitačná interakcia**. Vlastnosť hmotných objektov vstupovať do gravitačnej interakcie sa nazýva **gravitácia**.

Mierou gravitačných vlastností hmotných objektov je **hmotnosť**.

Newton sformuloval **všeobecný (Newtonov) gravitačný zákon**:

Každé dva hmotné body sa vzájomne priťahujú gravitačnou silou F_g , ktorej veľkosť je priamo úmerná súčinu $m_1.m_2$ ich hmotností a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti r :

$$F_g = \kappa \frac{m_1.m_2}{r^2}$$

Konštanta úmernosti κ sa nazýva **gravitačná konštanta**. Jej veľkosť sa určuje experimentálne, s tabuľke SI má hodnotu $\kappa = 6,67.10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$.

Všeobecný gravitačný zákon v uvedenom tvare platí presne aj pre dve homogénne gule, kde r je vzdialenosť ich stredov. Pre telesá iných tvarov sa veľkosť gravitačnej sily počíta zložitejším postupom.

Príklad:

Dva hmotné body, každý s hmotnosťou m , pôsobia na seba vo vzdialenosti r silou veľkosti F . Akou silou F' budú na seba pôsobiť hmotné body s hmotnosťami $3.m$ a $4.m$ vo vzdialenosti $2.r$?

Riešenie:

Pre hmotné body s hmotnosťou m platí: $\kappa \frac{m_1.m_2}{r^2} = \kappa \frac{m^2}{r^2} = F$. Potom platí:

$$F' = \kappa \frac{3m.4m}{(2.r)^2} = 3.\kappa \frac{m^2}{r^2} = 3.F.$$

Hmotné body na seba pôsobia silou $3.F$.

4.2 Gravitačné pole

Po objavení všeobecného gravitačného zákona sa fyzici začali zamýšľať nad mechanizmom pôsobenia gravitačných síl. Vznikli dve hypotézy:

- hypotéza pôsobenia na diaľku, podľa ktorej hmotné objekty pôsobia na seba gravitačnými silami okamžite bez akéhokoľvek sprostredkovateľa,

- hypotéza pôsobenia poľa, podľa ktorej sa gravitačná interakcia uskutočňuje prostredníctvom poľa.

Podľa súčasnej fyziky každé teleso vytvára vo svojom okolí gravitačné pole. Gravitačné pole je forma hmoty, ktorej základným prejavom je silové pôsobenie na všetky hmotné objekty v ňom sa nachádzajúce. teda gravitačná interakcia sa uskutočňuje prostredníctvom gravitačného poľa. Je to ďalekodosahová interakcia, t.j. jej pôsobenie siaha teoreticky do nekonečna.

Ukazuje sa, že fyzikálne polia nemajú spojitú štruktúru, ale sú tvorené časticami. Častice gravitačného poľa, hoci zatiaľ neboli pozorované, dostali názov gravitóny.

4.3 Intenzita gravitačného poľa

Intenzita $\vec{K}$ gravitačného poľa v istom mieste je podiel gravitačnej sily $\vec{F}_G$, ktorá v tomto mieste pôsobí na hmotný bod s hmotnosťou m a hmotnosti m , teda:

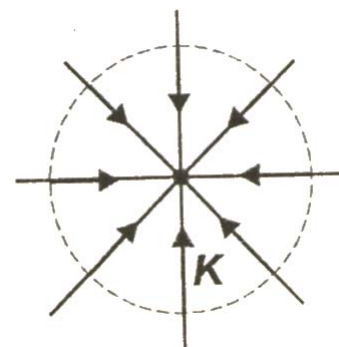
$$\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}$$

Jednotkou intenzity gravitačného poľa je $[1N.kg^{-1}]$. Gravitačné pole má v istom mieste intenzitu $1N.kg^{-1}$, ak v tomto mieste pôsobí silou $1N$ na hmotný bod s hmotnosťou $1kg$.

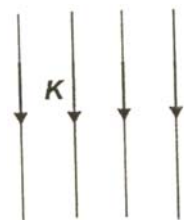
Porovnaním vzťahov $\vec{F}_g = m.\vec{a}_g$ a $\vec{F}_g = m.\vec{K}$ zistíme, že $\vec{K} = \vec{a}_g$. Teda intenzita gravitačného poľa v istom mieste sa rovná zrýchleniu, ktoré v tomto mieste udeľuje telesu gravitačná sila $\vec{F}_g$. Nazýva sa **gravitačné zrýchlenie**.

Gravitačné pole môžeme graficky znázorniť siločiarami. Siločiara je myslená čiara, ktorej dotyčnica v každom bode má smer intenzity gravitačného poľa.

Špeciálnymi prípadmi gravitačného poľa je radiálne a homogénne gravitačné pole. Gravitačné pole sa nazýva **radiálne**, ak jeho intenzita vo všetkých bodoch smeruje do toho istého bodu. Radiálne gravitačné pole je v okolí hmotného bodu. Jeho intenzita vo vzdialenosti r od hmotného bodu s hmotnosťou M má veľkosť:



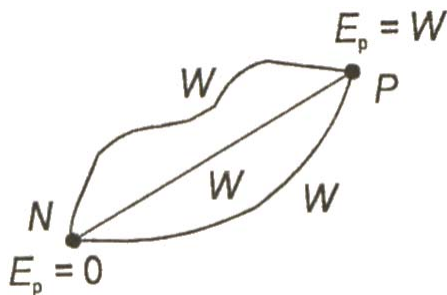
$$K = \kappa \frac{M}{r^2}$$



Teda je nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti od hmotného bodu. Radiálne gravitačné pole vznikne tiež okolo homogénnej gule, pričom r je vzdialenosť od jej stredu.

Gravitačné pole sa nazýva **homogénne**, ak jeho intenzita má vo všetkých bodoch rovnakú veľkosť aj smer.

4.4 Gravitačný potenciál



Uvažujme v gravitačnom poli dve miesta N a P . AK gravitačná sila premiestni hmotný bod z miesta P do miesta N , vykoná prácu W . Je možné dokázať, že práca W nezávisí od trajektórie, po ktorej sa hmotný bod pohybuje. Táto práca určuje zmenu energie, ktorá súvisí so zmenou polohy, preto je to forma polohovej energie. Nazýva sa **gravitačná potenciálna energia**.

Ak v mieste N zvolíme hodnotu gravitačnej potenciálnej energie za nulovú (miesto nulovej potenciálnej energie), potom na mieste P je $E_p = W$. **Teda gravitačná potenciálna energia hmotného bodu v istom mieste gravitačného poľa je**

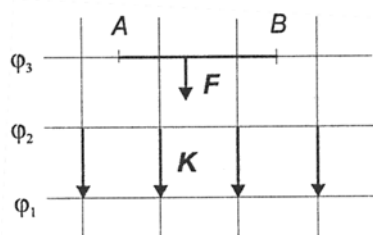
určená prácou, ktorú vykoná gravitačná sila pri premiestnení hmotného bodu z daného miesta do miesta nulovej potenciálnej energie.

Množina všetkých bodov gravitačného poľa s rovnakou gravitačnou potenciálnou energiou je hladina gravitačnej energie.

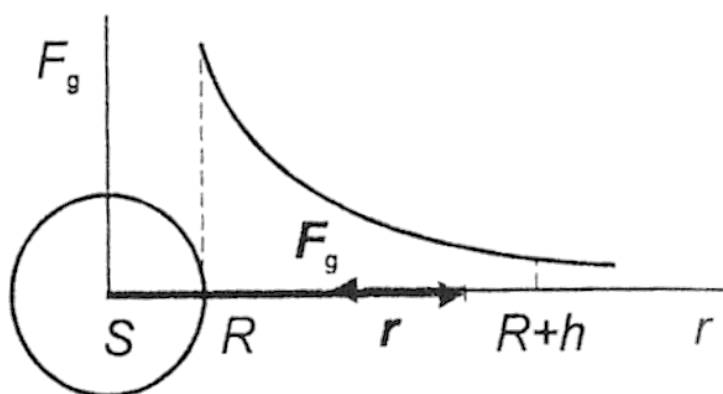
Gravitačný potenciál φ v istom mieste gravitačného poľa je podiel gravitačnej potenciálnej energie hmotného bodu s hmotnosťou m v tomto mieste a hmotnosti m , teda $\varphi = \frac{E_p}{m}$.

Pre jednotku gravitačného potenciálu platí $[\varphi] = \frac{[E_p]}{[m]} = \frac{[1J]}{[1kg]} = [1J \cdot kg^{-1}]$.

Množina všetkých bodov gravitačného poľa s rovnakým potenciálom je **hladina potenciálu** (ekvipotenciálna hladina).



Uvažujme homogénne gravitačné pole. Ak hmotný bod s hmotnosťou m premiestňujeme z miesta A do miesta B po vyznačenej trajektórii, gravitačná sila je kolmá na trajektóriu, preto nekoná prácu. To znamená, že všetky body ležiace v rovine kolmej siločiar, majú rovnaký potenciál. Preto roviny kolmé na siločiar sú v homogénnom gravitačnom poli hladinami potenciálu.



Uvažujme radiálne gravitačné pole okolo homogénnej gule s hmotnosťou M a polomerom R . Nech hmotnému bodu na povrchu gule prislúcha nulová gravitačná potenciálna energia. Potom jeho potenciálnu energiu vo výške h nad povrchom gule platí:

$$E_p = W = - \int_{R+h}^R \kappa \frac{M \cdot m}{r^2} dr = - \kappa \cdot M \cdot m \int_{R+h}^R \frac{1}{r^2} dr = - \kappa \cdot M \cdot m \left[-\frac{1}{r} \right]_{R+h}^R = \kappa \cdot M \cdot m \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

Teda gravitačná potenciálna energia je vo všetkých bodoch guľovej plochy polomeru $R+h$ rovnaká. Potom gravitačný potenciál vypočítame:

$$\varphi = \frac{E_p}{m} = \kappa \cdot M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right)$$

Vo všetkých bodoch guľovej plochy polomeru $R+h$ je rovnaký, preto guľové plochy sú v radiálnom gravitačnom poli hladinami potenciálu.

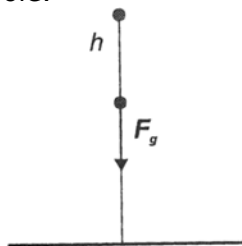
4.4 Gravitačné pole Zeme

Aby sme vytvorili zjednodušený model gravitačného poľa Zeme, budeme považovať Zem za homogénnu guľu s hmotnosťou M_z a polomerom R_z . Potom môžeme gravitačné pole Zeme považovať za radiálne s intenzitou veľkosti:

$$K = \kappa \frac{M_z}{(R_z + h)^2}$$

kde h je výška nad povrchom Zeme. Ak povrch Zeme bude hladinou nulovej potenciálnej energie, tak hmotný bod s hmotnosťou m bude mať vo výške h gravitačnú potenciálnu energiu $E_p = \kappa M m \left(\frac{1}{R_z} - \frac{1}{R_z + h} \right)$.

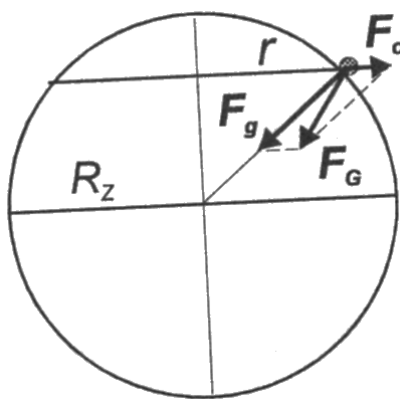
Ak vymedzíme malú časť gravitačného poľa nad povrchom Zeme $h \ll R_z$, môžeme ho považovať za homogénne gravitačné pole.



Potom pre gravitačnú potenciálnu energiu hmotného bodu s hmotnosťou m vo výške h platí:

$$E = W = F_g h = K.m.h = a_g.m.h$$

Vzťažná sústava spojená so Zemou je v dôsledku otáčania Zeme neinerciálna, preto na každý hmotný bod s hmotnosťou m pôsobí okrem gravitačnej sily F_g aj zotrvačná odstredivá sila $F_0 = m.\omega^2.r$.



Výslednica týchto síl je **tiažová sila** $\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_0$. Tiažová sila udeľuje voľne pustenému telesu s hmotnosťou m tiažové zrýchlenie $\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$. Jeho veľkosť závisí od zemepisnej šírky a aj od výšky nad povrchom Zeme.

4.4 Pohyby v homogénnom gravitačnom poli Zeme

Malú časť gravitačného poľa nad povrchom Zeme môžeme považovať za homogénnu. Pretože zotrvačná odstredivá sila je oveľa menšia ako gravitačná sila, s dobrou presnosťou platí $\vec{F}_G \doteq \vec{F}_g$ a tiež $\vec{g} \doteq \vec{a}_g$.

Jednoduchým pohybom v homogénnom gravitačnom poli Zeme je voľný pád. Je to pohyb hmotného bodu vo vákuu so začiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0 = 0 \frac{m}{s}$. Platí preň $v = g.t$ a $s = \frac{1}{2}gt^2$.

Pohyby so začiatočnou rýchlosťou $\vec{v}_0 \neq 0 \frac{m}{s}$ v homogénnom gravitačnom poli vo vákuu sa nazývajú **vrhy**. Sú to pohyby zložené z rovnomerného priamočiareho pohybu rýchlosťou $\vec{v}_0$ a voľného pádu. Rozlišujeme ich podľa smeru začiatočnej rýchlosti $\vec{v}_0$.

Zvislý vrh nahor koná hmotný bod, ak začiatočná rýchlosť $\vec{v}_0$ má opačný smer ako $\vec{g}$. Potom pre veľkosť rýchlosti a dráhy platí

$$v = v_0 - g.t ; s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

Najväčšia výška h , ktorú hmotný bod dosiahne, je výška výstupu. V tejto výške je $v = 0$, preto $0 = v_0 - gt_v$, kde $t_v = \frac{v_0}{g}$ je čas výstupu. Potom

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t_v^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Po dosiahnutí výšky h hmotný bod padá voľným pádom a dopadne rýchlosťou

$$v_d = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \frac{v_0^2}{2g}} = v_0$$

Príklad:

Teleso bolo vrhnuté zvisle nahor rýchlosťou 50 m.s^{-1} . V akej výške bolo na konci štvrtej sekundy? Do akej najväčšej výšky vystúpilo? Za aký čas dopadlo?

Riešenie:

$$v_0 = 50 \text{ m.s}^{-1}; t = 4,0 \text{ s}; s_4 = ?; h = ?; t_d = ?$$

Na konci štvrtej sekundy bude teleso vo výške

$$h_{(4s)} = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = 50 \text{ m.s}^{-1} \cdot 4,0 \text{ s} - 5 \text{ m.s}^{-2} \cdot 16 \text{ s}^2 = 120 \text{ m}$$

$$\text{Výška výstupu je } h = v_0 t - \frac{1}{2} g t_v^2 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{2500 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^2}{2 \cdot 10 \text{ m.s}^2} = 125 \text{ m}$$

Čas dopadu t_d je súčtom času výstupu t_v a času voľného pádu t_p , teda:

$$t_d = t_v + t_p = 2 \cdot t_v = \frac{2 \cdot v_0}{g} = 10 \text{ s}$$

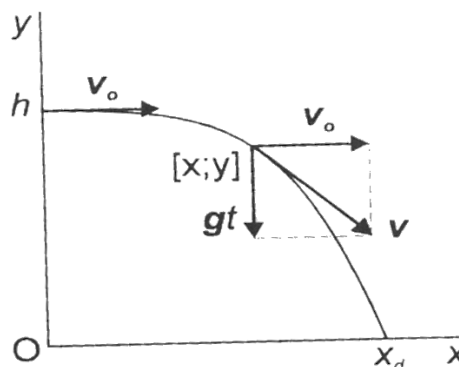
Teleso bolo na konci štvrtej sekundy vo výške 120 m , vystúpilo do najvyššej výšky 125 m a dopadlo za 10 s .

Vodorovný vrh koná hmotný bod, ak začiatočná rýchlosť $\vec{v}_0$ je kolmá na $\vec{g}$. Potom pre súradnice ľubovoľného bodu trajektórie v čase t platí:

$$x = v_0 t$$

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Vylúčením času t získame rovnicu $y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + h$, čo



je rovnica paraboly.

Pri vodorovnom vrhu sa hmotný bod pohybuje po parabole. Rýchlosť v ľubovoľnom čase t je

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

Čas vrhu t_v sa určí z podmienky $y = 0$, odkiaľ $t_v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Dĺžka vrhu bude $x_d = v_0 t_v = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Príklad:

Z veže vysokej 125 m bol vrhnutý kameň vo vodorovnom smere rýchlosťou 20 m.s^{-1} . Akú rýchlosť mal kameň na konci druhej sekundy? V akej vzdialenosti od päty veže dopadne?

Riešenie:

$$h = 125 \text{ m}; v_0 = 20 \text{ m.s}^{-1}; v_2 = ?; x_d = ?$$

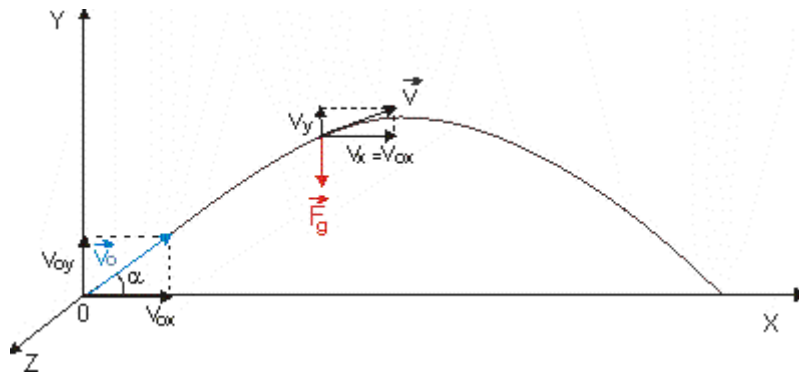
Rýchlosť na konci druhej sekundy je $v_2 = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$, po dosadení

$$v_2 = \sqrt{400 \text{ m}^2 \text{s}^{-2} + 400 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}} = 28 \text{ m.s}^{-1}.$$

Dĺžka vrhu je $x_d = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 20 \text{ m.s}^{-1} \cdot \sqrt{\frac{250 \text{ m}}{10 \text{ m.s}^{-2}}} = 100 \text{ m}$.

Na konci druhej sekundy mal kameň rýchlosť asi 28 m.s^{-1} a dopadol do vzdialenosti 100 m .

Šikmý vrh nahor koná hmotný bod, ak začiatočná rýchlosť $\vec{v}_0$ zvierá s vodorovnou rovinou uhol $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (elevačný uhol).



Potom rýchlosť vrhu bude $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$, jej zložky v smere súradnicových osí budú $v_x = v_0 \cos \alpha$ a $v_y = v_0 \sin \alpha - g \cdot t$. Pre súradnice ľubovoľného bodu trajektórie platí:

$$x = v_0 t \cos \alpha ; y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

odkiaľ vylúčením času získame rovnicu:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

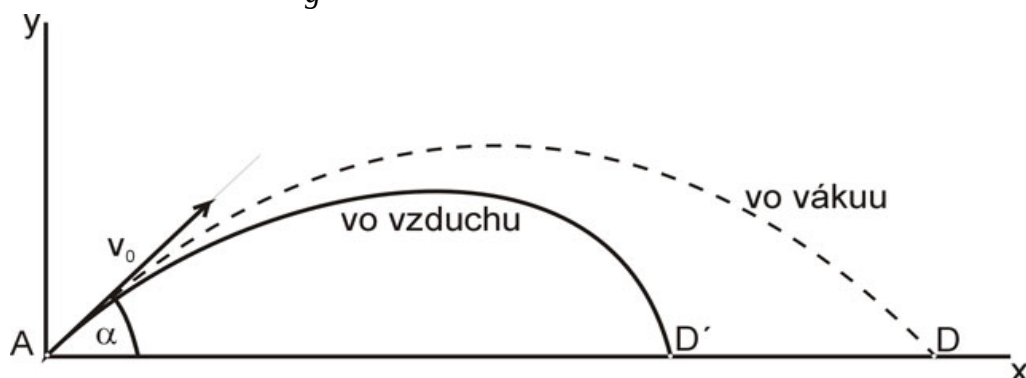
čo je rovnica paraboly. Teda hmotný bod sa pohybuje po parabole. Čas vrhu t_v určíme z podmienky $y = 0$, odkiaľ dostaneme

$$v_0 t_v \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_v^2 = 0$$

$$t_v = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Potom dĺžka vrhu bude $x_d = v_0 t_v = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Dĺžka vrhu bude maximálna, ak $\sin 2\alpha = 1$, teda

$$\alpha = 45^\circ. \text{ Potom } x_d = \frac{v_0^2}{g}$$



Parabolickú trajektóriu opisuje šikmo vrhnuté teleso v homogénnom poli len vo vákuu. V blízkosti povrchu Zeme však odpor vzduchu spôsobuje, že dráha striel nie je parabola, ale nesúmerná balistická krivka. Veľkosť dostrelu sa vo vzduchu skracuje.

Príklad:

Teleso bolo vrhnuté šikmo nahor začiatočnou rýchlosťou 40m.s^{-1} pod uhlom 60° . Aká bola výška vrhu, dĺžka vrhu a za aký čas teleso dopadlo ?

Riešenie:

$$v_0 = 40\text{m.s}^{-1}; \alpha = 60^\circ; y_m = ?; x_d = ?; t_v = ?$$

Výšku vrhu y_m vypočítame ako y-ovú súradnicu v čase t_m , v ktorom je $v_y = 0$.

$$\text{Potom } t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \text{ a teda } y_m = \frac{v_0 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{1600\text{m.s}^{-2} \cdot \frac{3}{4}}{20\text{m.s}^{-2}} = 60\text{m}$$

$$\text{Čas dopadu bude } t_d = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 40\text{m.s}^{-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10\text{m.s}^{-2}} \doteq 6,9\text{s}$$

$$\text{Dĺžka vrhu bude } x_d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \doteq 140\text{m}$$

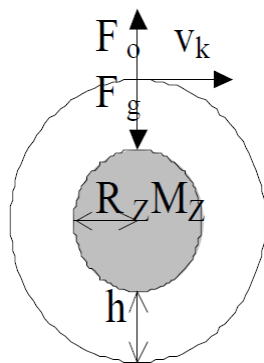
Výška vrhu bola 60m , dĺžka vrhu 140m a čas dopadu $6,9\text{s}$.

4.5 Pohyby v radiálnom gravitačnom poli Zeme

Pri pohybe telies vo väčších vzdialenostiach od povrchu Zeme nemôžeme považovať gravitačné pole za homogénne, pretože hodnota gravitačného zrýchlenia nie je konštantná. Ak dráha hmotného bodu pri pohybe v gravitačnom poli Zeme je porovnateľná s rozmermi Zeme, považujeme gravitačné pole za radiálne.

Obežná dráha Zeme

V radiálnom gravitačnom poli Zeme existuje pre danú vzdialenosť h od povrchu Zeme taká začiatočná rýchlosť $\vec{v}_0$, pri ktorej sa teleso pohybuje po kružnici so stredom v gravitačnom strede Zeme.



Pri pohybe telesa po kruhovej trajektórii je veľkosť tiažovej a odstredivej sily rovnaká. Vychádzame z dynamickej podmienky pohybu po kružnici. Fiktívna (zdanlivá) odstredivá sila sa rovná sile dostredivej. **Za dostredivú silu považujeme práve gravitačnú silu Zeme, pôsobiacu na teleso.** Túto môžeme vyjadriť i pomocou Newtonovho gravitačného zákona; jednoduchšie je však vyjadriť ju výrazom pre tiaž $g \cdot m$ (platí pre

$$h \rightarrow 0, \text{ inak by sme } F_g \text{ vyjadrili zo vzorca } F_g = \kappa \frac{m \cdot M_z}{r^2} = \kappa \frac{m \cdot M_z}{(R_z + h)^2}).$$

$$F_d = F_g$$

$$\frac{m \cdot v_l^2}{R_z} = g \cdot m$$

($v_k = v_l$, kde v_k je kruhová rýchlosť keď sa hmotný bod pohybuje po dráhe, v_l je prvá kozmická rýchlosť)

$$v_l = \sqrt{g \cdot R_z} = \sqrt{9,81\text{ms}^{-2} \cdot 6,378 \cdot 10^6\text{m}} \doteq 7900\text{m.s}^{-1}$$

Prvá kozmická rýchlosť

Aby sa raketa, alebo raketoplán dostala na **obežnú dráhu okolo Zeme**, a teda po vypnutí motorov nespadla späť na Zem, musí dosiahnuť **tzv. 1. kozmickú rýchlosť**. Pri nej je gravitačná sila pôsobiacu na raketu vlastne rovná dostredivej sile, a iba stáča pohyb rakety do kružnice okolo Zeme. Veľkosť prvej kozmickej rýchlosti je pre našu planétu asi $7,9\text{ km/s}$, a

dlho sa zdalo, že sa prakticky nebude dať dosiahnuť. Kvôli odporu vzduchu a veľkým preťaženiam sa nedá získať napríklad výstrelom z dela. Až objav reaktívnych raketových motorov ukázal, že aj takáto veľká rýchlosť sa dá dosiahnuť.

Prvá kozmická rýchlosť je rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu, aby obiehalo okolo Zeme.

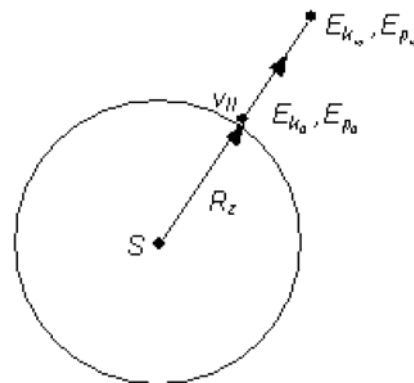
Akonáhle raketa, či raketoplán dosiahne obežnú dráhu okolo Zeme, jej hlavné raketové motory prestávajú pracovať. Prečo vtedy raketa nespadne späť na Zem? Ona v skutočnosti neustále padá, jej rýchlosť je však taká veľká, že sa tým len zakrivuje jej dráha. Ak je jej rýchlosť menšia ako 1. kozmická, raketa sa približuje k Zemi, ak je jej rýchlosť väčšia, raketa sa od Zeme vzdaluje. Pritom sa veľkosť jej rýchlosti znižuje, takže sa vlastne pohybuje po eliptickej dráhe. Ak je rýchlosť rakety väčšia ako tzv. 2. kozmická rýchlosť, raketa sa definitívne vzdiali od Zeme.

Druhá kozmická rýchlosť

Druhá kozmická rýchlosť je rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu pri povrchu Zeme, aby opustilo gravitačné pole Zeme.

Pri výpočte vychádzame zo zákona zachovania celkovej mechanickej energie, danej súčtom kinetickej a potenciálnej energie. Celková energia v bode vrhu na povrchu Zeme sa rovná celkovej energii v nekonečne, takže

$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k\infty} + E_{p\infty}$$



Ak uvážime, že E_{p0} aj $E_{k\infty}$ sa rovnajú nule, posledná rovnosť sa zjednoduší na tvar:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_{II}^2 = \kappa \frac{M_z \cdot m}{R_z}$$

$$v_{II} = \sqrt{2 \cdot \kappa \cdot \frac{M_z}{R_z}}$$

Upravíme pomocou vzťahu pre gravitačné zrýchlenie na zemskom povrchu $g = \kappa \frac{M_z}{R_z^2}$ nasledovne:

$$v_{II} = \sqrt{2gR_z} = v_I \cdot \sqrt{2}$$

Pre našu Zem je približne rovná $11,2 \text{ km/s}$. **Tretia kozmická rýchlosť** je rýchlosť potrebná na to, aby raketa opustila našu slnečnú sústavu. Je rovná približne $16,6 \text{ km/s}$.

Príklad:

Akú výšku nad povrchom Zeme musí mať umelá družica Zeme, aby bola stále nad tým istým miestom na rovníku (stacionárna družica)?

Riešenie:

$$R_z = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}; M_z = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}; T_z = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$$

Ak by bola družica stále nad tým istým miestom, musí mať družica a aj miesto na rovníku rovnakú periódu, teda rovnakú uhlovú rýchlosť. Preto platí:

$$\frac{2\pi}{T_z} = \frac{v_k}{R_z + h}; \text{ teda } \frac{2\pi}{T_z} = \sqrt{\kappa \frac{M_z}{(R_z + h)^3}}; \text{ odkiaľ } h = \sqrt[3]{\frac{\kappa M_z T_z^2}{4\pi^2}} - R_z$$

$$\text{Po dosadení } h = 42,2 \cdot 10^6 - 6,37 \cdot 10^6 \doteq 35,8 \cdot 10^6 \text{ m} = 35800 \text{ km}$$

Stacionárna družica musí byť vo výške asi 35800 km nad povrchom Zeme.

Riešenie príkladu – podrobnejšie vysvetlenie:

Stacionárne družice Zeme sú také umelé družice, ktoré obiehajú nad zemským rovníkom v smere od západu na východ, pričom doba ich obehu je zhodná s dobou jedného otočenia Zeme okolo svojej osi, t.j. $T = 24 \text{ hod.} = 86400 \text{ s}$. Takáto družica sa potom zdá akoby „zavesená“ nad jedným miestom zemského povrchu. Stacionárne družice sú preto veľmi vhodné na telekomunikačné účely, t.j. na prenos rozhlasových a televíznych programov, medzikontinentálnych telefonických hovorov a pod.

Pri výpočte výšky h vychádzame z rovnosti odstredivej a dostredivej, t.j. gravitačnej sily

$$\frac{mv^2}{R_z + h} = G \frac{M_z m}{(R_z + h)^2},$$

kde rýchlosť obiehanie v určíme ako podiel dráhy a času pri jednom obehu

$$v = \frac{2\pi(R_z + h)}{T}.$$

Po dosadení do predchádzajúceho vzťahu a vykrátení hmotnosti m na oboch stranách rovnice dostaneme

$$\frac{4\pi^2(R_z + h)^3}{(R_z + h)T^2} = G \frac{M_z}{(R_z + h)^2}.$$

Po úprave

$$\begin{aligned} 4\pi^2(R_z + h)^3 &= GM_z T^2 \\ R_z + h &= \sqrt[3]{\frac{GM_z T^2}{4\pi^2}} \\ h &= \sqrt[3]{\frac{GM_z T^2}{4\pi^2}} - R_z \end{aligned}$$

číselne

$$h = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 86400^2 \text{ s}^2}{4\pi^2}} - 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$h = 35\,800 \text{ km}$$

Poznámka

Odstredivú silu môžeme vyjadriť aj pomocou uhlovej rýchlosti ω . Výhodou tohto vyjadrenia je, že uhlová rýchlosť družice je rovnaká ako u bodov na zemskom povrchu. Tento spôsob riešenia prenechávame na čitateľa.

4.6 Slnčná sústava

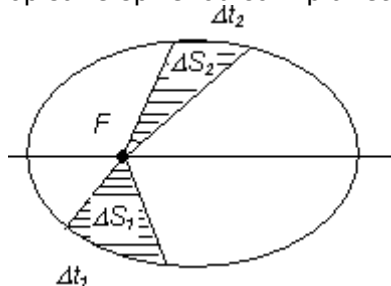
Slnčnú sústavu tvorí Slnko a telesá, ktorých pohyb je ovládaný gravitačným poľom Slnka.

Slnko je hviezda, teda plynné teleso guľovitého tvaru, ktorého hmotnosť je $M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, čo je 99% hmotnosti slnečnej sústavy.

Okolo Slnka obieha deväť planét: Merkur, Venuša, Zem, Mars, Jupiter, Saturn, Urán, Neptun a Pluto. Pohyb planét okolo Slnka kinematicky opisujú tri Keplerove zákony.

Prvý Keplerov zákon: Planéty sa pohybujú okolo Slnka po elipsách málo odlišných od kružníc, v ktorých spoločným ohniskom je Slnko.

Druhý Keplerov zákon: Plochy opísané sprievodičom planéty za rovnaké doby sú rovnaké.



Sprievodič planéty je spojnica Slnka a planéty. Použitím tohto zákona môžeme zistiť, že rýchlosť planét blízko Slnka (kedy je sprievodič kratší) je väčšia ako keď je planéta ďaleko od Slnka. Druhý Keplerov zákon je priamym dôsledkom zákona zachovania momentu hybnosti planéty. Moment hybnosti sa počíta podľa vzťahu $L = mrv_k$,

kde m je hmotnosť planéty, r je momentálna vzdialenosť od Slnka a v_k je zložka rýchlosti kolmá na spojnicu Slnko-planéta. Obsah vykreslený za jednotku času sprievodičom planéty je pritom rovný $rv_k/2$, je teda priamo úmerný momentu hybnosti. Preto keďže tento ostáva konštantný, aj obsah opísaný sprievodičom za jednotku času je konštantný.

Tretí Keplerov zákon: Pomer druhých mocnín obežných dôb dvoch planét sa rovná pomeru tretích mocnín hlavných poloosí ich trajektórií, teda:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Okrem planét obiehajú okolo Slnka aj planétky. Sú to telesá menších rozmerov ako planéty, často nepravidelných tvarov. Najväčšia je Ceres s priemerom asi 700km.

Okolo planét obiehajú mesiace. Do slnečnej sústavy Ďalej patria kométy, meteroidy a medziplanetárna látka.

Odvozenie Keplerových zákonov z Newtonovho gravitačného zákona

Kvôli jednoduchosti predpokladajme nie eliptické, ale kruhové dráhy dvoch planét s polomermi r_1 a r_2 . Vychádzame z Newtonovho zákona sily, ktorý pre prvú planétu s hmotnosťou m_1 má tvar

$$F_1 = m_1 a_1 \quad (3.2.2.5)$$

a_1 je dostredivé zrýchlenie planéty. Toto, ako vieme z kinematiky, môžeme vyjadriť pomocou uhlovej rýchlosti alebo periódy obehu ako

$$a_1 = \omega_1^2 r_1 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} r_1 \quad (3.2.2.6)$$

Jeho dosadením do vzťahu (3.2.2.5) dostaneme

$$F_1 = m_1 \frac{4\pi^2}{T_1^2} r_1 \quad (3.2.2.7)$$

Sila F_1 je zároveň totožná s gravitačnou silou, ktorú vyjadruje Newtonov gravitačný zákon

$$F_1 = G \frac{m_s m_1}{r_1^2} \quad (3.2.2.8)$$

m_s je hmotnosť Slnka. Porovnaním vzťahov (3.2.2.7) a (3.2.2.8) dostaneme

$$\frac{r_1^3}{T_1^2} = G \frac{m_s}{4\pi^2} \quad (3.2.2.9)$$

Keď urobíme rovnaký výpočet pre druhú planétu, dostaneme analogický výsledok

$$\frac{r_2^3}{T_2^2} = G \frac{m_s}{4\pi^2} \quad (3.2.2.10)$$

Porovnaním ľavých strán oboch posledných vzťahov dostaneme

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \quad ,$$

čo je vyjadrením 3. Keplerovho zákona, ktorý sme chceli dokázať.

Príklad:

Aká je vzdialenosť Jupitera od Slnka, ak jeho obežná doba okolo Slnka je asi 12 rokov ?

Riešenie:

$$T_z = 1rok ; a_z = 1AU ; T_j = 12rokov ; a_j = ?$$

Podľa tretieho Keplerovho zákona platí:

$$\frac{a_j^3}{a_z^3} = \frac{T_z^2}{T_j^2} \text{ odkiaľ } a_j = a_z \sqrt[3]{\frac{T_j^2}{T_z^2}} = 1AU \cdot \sqrt[3]{12^2} = 5,2AU$$

Vzdialenosť Jupitera od Slnka je asi 5,2 astronomických jednotiek.

Poznámka:

$$1 AU = 149\,597\,870\,691 \pm 30 \text{ m}$$

Astronomická jednotka je bola definovaná ako stredná vzdialenosť Slnka a Zeme. Vzhľadom na to, že hmotnosť Slnka sa znižuje, astronomická jednotka sa skraca asi o 1cm ročne.